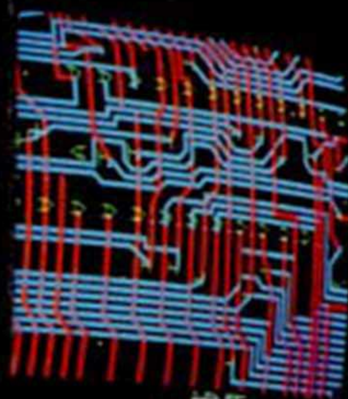
# ANALISIS Y DISEÑO DE CIRCUITOS CON COMPUTADORA

J.M. MIRO SANS
A. PUERTA NOTARIO
J.M. MIGUEL LOPEZ
M. SANZ POSTILS



Incluye Disquete



Alfaomega



marcombo

# ANALISIS Y DISEÑO DE CIRCUITOS CON COMPUTADORA

Foto de la cubierta: THE IMAGE BANK-MEXICO, Flip Chalfant

**Joan María Miró Sans**
**Antonio Puerta Notario**
**José María Miguel López**
**Margarita Sanz Postils**
Profesores Titulares de la Escuela Técnica Superior de
Ingenieros de Telecomunicación de Barcelona

# ANALISIS Y DISEÑO DE CIRCUITOS CON COMPUTADORA

Alfaomega marcombo

Esta obra fue galardonada con el premio de Electrónica Profesional en la concesión de la 12ª edición de los "Premios Mundo Electrónico"


Apartado Postal 7-1032, 06700 México, D.F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial
Registro No. 663



ISBN 968-6223-48-7

Impreso en México – Printed in México

# *Indice*

# *Prólogo*

En el proceso de diseño de circuitos electrónicos se establecen dos fases bien diferenciadas. En la primera, tradicionalmente caracterizada por el uso de papel y lápiz, el diseñador, partiendo de las especificaciones y apoyándose en sus conocimientos y experiencia, notas de aplicación, manuales e intuición, selecciona o crea esquemas y asigna valores a los elementos procurando que sus aproximaciones sean siempre razonables. La segunda fase tiene como escenario el laboratorio donde se monta un prototipo experimental. Es allí donde se comprueba la validez de las estimaciones realizadas en la primera fase modificando, si es necesario, determinados valores hasta lograr un comportamiento satisfactorio.

El papel del análisis teórico de circuitos, en este proceso, se inserta al final de la primera fase y su objetivo es determinar si el circuito propuesto tiene posibilidades de comportarse según lo previsto de acuerdo con las especificaciones. Hasta hace algunos años, muchos diseñadores opinaban que era suficiente con un somero análisis de viabilidad, siendo de hecho en la fase experimental donde se rediseñaba la mayoría de las veces el circuito. Hoy día, sin embargo, este procedimiento es impracticable en ciertos casos y desaconsejable en la mayoría. En efecto, muchos circuitos se diseñan pensando en su integración monolítica y, al ser la fabricación de máscaras sumamente cara, resulta prohibitivo tener que modificarlas si no se cumplen las especificaciones. Algo similar ocurre en circuitos que procesan señales con espectros de frecuencia situados más allá de las decenas de megahercios. Las técnicas de construcción de circuitos en ese margen requieren un minucioso estudio en la ubicación de los componentes y longitud de las conexiones, por lo que resulta rentable efectuar un análisis preciso del circuito, antes de su implementación, al objeto de reducir al mínimo las modificaciones sobre el prototipo. Es en este contexto donde emerge el computador como herramienta básica de diseño. Antes de verificar en el laboratorio la validez de los cálculos efectuados, tiene gran interés hacer una simulación del circuito siendo mediante un computador como se simulará y analizará el circuito.

Dentro de los circuitos electrónicos pueden establecerse dos grandes áreas: la digital y la analógica. El ámbito de este libro corresponde a la segunda y, más concretamente, a los circuitos analógicos lineales y a los de condensadores conmutados (Switched-Capacitor, SC) que cubren una amplia gama de aplicaciones de interés en el procesado analógico de señales. De hecho, los avances logrados en la tecnología MOS posibilitan realizaciones de circuitos SC muy competitivos desde el punto de vista de área de integración y consumo, superando notablemente a realizaciones de otros tipos. En el campo de la simulación de circuitos analógicos, pueden encontrarse en el mercado varios programas de elevadas prestaciones. Tratan circuitos lineales y no lineales, realizan análisis de sensibilidad a pequeñas y grandes variaciones de los parámetros, incluso de la temperatura, etc. Estos programas, si bien son muy generales, tienen un elevado coste y son de difícil acceso para los profesionales que desarrollan su actividad en el campo del diseño de circuitos electrónicos de complejidad media, existiendo una separación excesiva entre coste y prestaciones por un lado y necesidades a cubrir por el otro.

Con la proliferación de PC compatibles, ha vuelto a tomar auge la creación de software de simulación de circuitos, bien sea adaptando los grandes programas a las posibilidades de estas máquinas o produciendo otros nuevos, caracterizados, en general, por ser mucho más interactivos que los anteriores.

Los programas de simulación desarrollados en este libro están especialmente concebidos para funcionar en PC compatibles, lográndose con ellos una considerable agilidad y precisión.

El libro está dividido en siete capítulos y para una lectura provechosa se considera conveniente tener los conocimientos propios de un curso básico de teoría de circuitos tales como análisis sistemático (mallas y nodos), régimen permanente senoidal y circuito transformado de Laplace, además de nociones sobre dispositivos electrónicos (modelos de pequeña señal, transistor bipolar, transistor de efecto de campo, amplificador operacional). No obstante, el primer capítulo está dedicado por completo a la revisión de la Teoría de Circuitos con un enfoque moderno que puede servir de motivación a lectores ya iniciados en estos temas.

El capítulo 2 se centra en la formulación de los métodos sistemáticos de análisis, con especial énfasis en el Nodal Modificado que se utiliza en el programa que incluye este libro.

En el capítulo 3 se abordan los circuitos SC que pueden caracterizarse adecuadamente en términos propios de los sistemas discretos, por lo que previamente se introducen los conceptos fundamentales sobre este tipo de sistemas, así como algunas herramientas matemáticas específicas necesarias para su estudio. Después de describir las bases de funcionamiento, partiendo del análisis detallado de algunos circuitos SC elementales, se justifican las estructuras utilizadas actualmente en las aplicaciones. Finalmente, y después de perfilar algunas líneas de diseño, se concluye en un método específico de análisis que, no obstante, está estrechamente ligado a los presentados anteriormente.

El planteamiento con detalle de los pasos a realizar para la elaboración de un programa, cuyo objetivo sea la determinación de la respuesta frecuencial de

circuitos analógicos y de condensadores conmutados, así como los métodos numéricos más adecuados para ello, determinan el contenido del capítulo 4.

A partir de este punto el texto se centra en el programa ARIADNA, desarrollado por los autores y grabado en el diskette que acompaña a este texto, describiendo en los tres capítulos restantes sus características, el manual de utilización y un conjunto de ejemplos ilustrativos analizados con su ayuda.

Los autores desean mostrar su agradecimiento a José María Griñó, que formó parte de nuestro grupo en su calidad de Becario del Plan de Formación de Personal Investigador, y a Antonio Ruiz que disfrutó de una Beca para Pregraduados de la C.T.N.E., por su ayuda en la optimización de los programas. Además, han significado valiosas aportaciones el trabajo de José Luis Sánchez en la realización de los esquemas y figuras del manuscrito original y el de Silvia Soriano y Rosa María Casajós en las tareas de mecanografiado.

Por último, siendo el ámbito de este libro el de la Teoría de Circuitos, no sería justo dejar de mencionar al Profesor Jaume Herranz que, por primera vez en la E.T.S.E. de Telecomunicació de Barcelona, le dio a la enseñanza de esta materia un enfoque moderno y globalizador.

LOS AUTORES

*Capítulo 1*

# Teoría de circuitos: una revisión

## 1.1 INTRODUCCION

Un circuito es un modelo matemático con estructura reticular de sistemas físicos eléctrico-electrónicos constituidos por la interconexión eléctrica, por ejemplo mediante soldadura, de dispositivos tales como resistores, condensadores, transistores, amplificadores operacionales y muchos otros.

El modelo en red o circuito se obtiene sobre la base de una figura geométrica que se denomina elemento y que tiene dos terminales cuyos extremos llamamos nodos, tal como se muestra en la figura 1.1. Un circuito resulta conectando sucesivamente a un elemento otro u otros elementos según determinadas reglas. La regla I (ver figura 1.1) incrementa en una unidad el número de elementos y nodos de un circuito. La regla II incrementa en una unidad el número de elementos y deja inalterado el número de nodos. Algunos ejemplos de circuitos generados según las normas precedentes se muestran en la figura 1.1. De acuerdo con lo anterior, los casos *a*) y *b*) son circuitos mientras que el caso *c*) no sería circuito al no ser posible su generación por aplicación de las reglas I y II.

## 1.2 VARIABLES DE CIRCUITO

A cada elemento en un circuito se le asignan dos variables: corriente $i$ a través del elemento y tensión $v$, también llamada diferencia de potencial o voltaje entre sus terminales. Dado que la variable corriente ha de tener especificado su valor y su sentido y la variable tensión su valor y polaridad, existirán cuatro posibles opciones para asignar las variables $v$-$i$ a los elementos. Normalmente, y por razones que luego explicaremos, se acostumbra a utilizar el «convenio de elemento pasivo» consistente en asignar un sentido arbitrario a la corriente colocando a continuación el signo positivo de la diferencia de

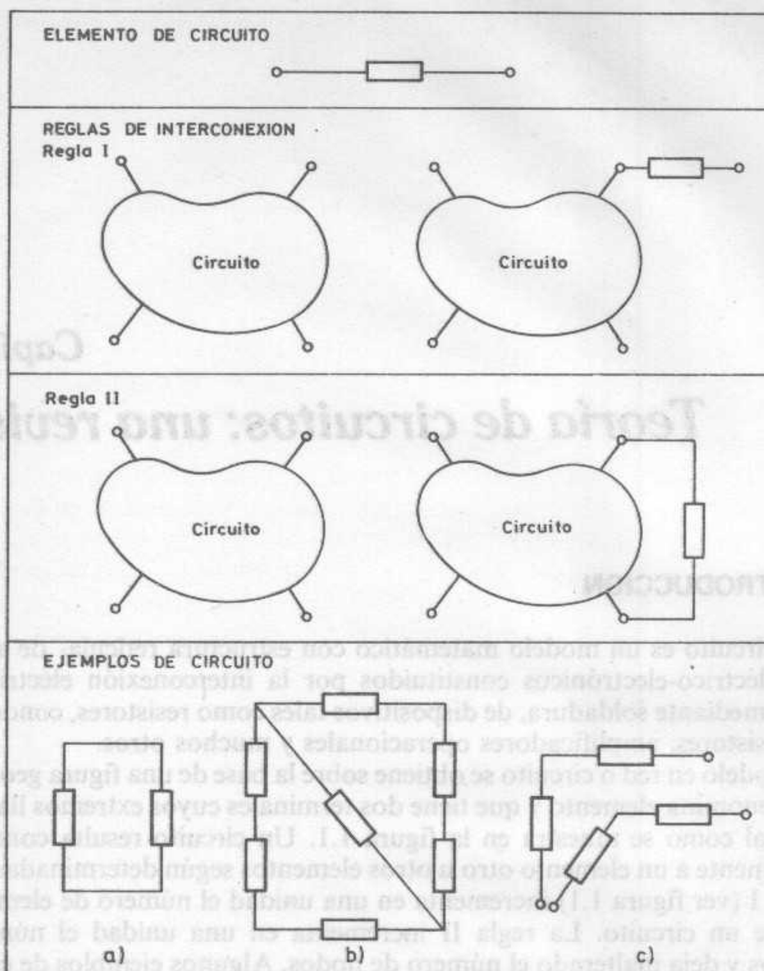



Figura 1.1 Definición de circuitos.

potencial en el terminal por el que entra la corriente, tal como muestra la figura 1.2.

La asignación de sentidos de referencia para *v-i* según el convenio del elemento pasivo es importante puesto que todas las relaciones matemáticas que se establezcan para los elementos de circuito estarán definidas según este sistema de referencia. A las variables tensión y corriente se las designa variables fundamentales en teoría de circuitos por cuanto tienen correlato directo y fácilmente medible en circuitos físicos con sus homónimas. Además de ellas dos, tienen interés otras variables como la carga $q$, el flujo $\lambda$, la potencia $p$ y la energía $W$. Así como la variable corriente $i$ es la derivada de la variable carga $q$, la tensión $v$ es la derivada de la variable flujo, tal como se muestra en el

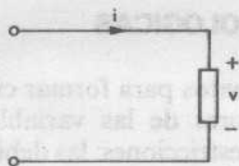


Figura 1.2 Definición elemento de circuito pasivo.

diagrama de la figura 1.3. En el sistema MKS las unidades respectivas son el voltio, amperio, culombio y weber. El producto tensión-corriente tiene dimensiones de trabajo por unidad de tiempo o potencia. Si las variables *v-i* que se multiplican corresponden a la tensión-corriente en un elemento con direcciones de referencia asignadas según el convenio del elemento pasivo, su producto $p = vi$ es la potencia eléctrica suministrada al elemento en cuestión en cada instante de tiempo. En efecto, las cargas al atravesar el elemento pierden energía potencial (entran por el terminal + y salen por el −). Dicha energía o bien se disipa o se almacena. La energía $W$ es finalmente la integral de la potencia suministrada al elemento a partir de un origen de tiempos.

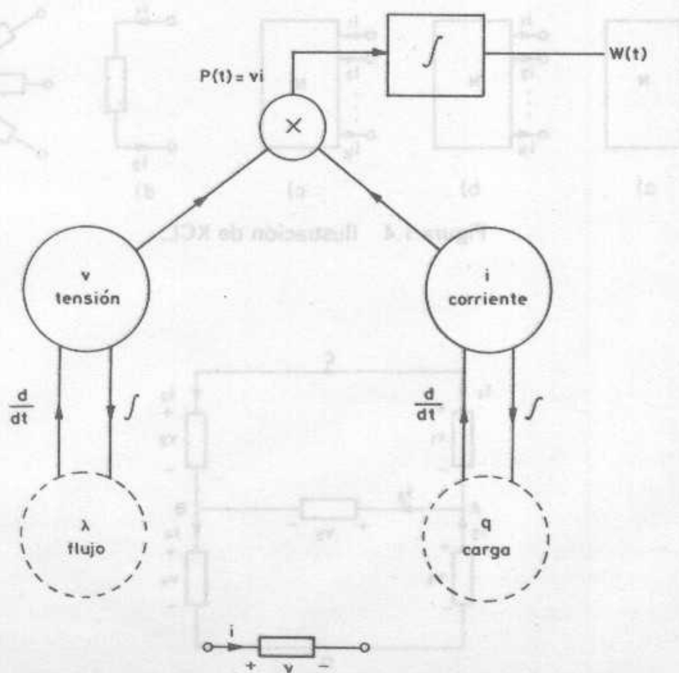


Figura 1.3 Variables circuitales.

## 1.3 RESTRICCIONES TOPOLOGICAS

La interconexión de elementos para formar circuitos conduce a estructuras en las que los posibles valores de las variables tensión y corriente están gobernados por dos tipos de restricciones: las debidas a la geometría del circuito y las debidas a las concretas relaciones *v-i* en cada uno de los elementos. En esta sección trataremos de las primeras.

El primer axioma que rige la teoría de circuitos se conoce con el nombre de ley de las corrientes de Kirchhoff (KCL) y dice lo siguiente: «La suma algebraica de las corrientes que confluyen a un circuito ha de ser nula para cualquier instante de tiempo». Así, por ejemplo, la figura 1.4 muestra un subcircuito *N*, es decir, una parte de un circuito obtenida al encerrar en una caja negra un cierto número de elementos del circuito original y mostrando los terminales 1,2,3...*k* que conectarían el subcircuito al resto del circuito.

La aplicación de KCL a los casos *a*) y *b*) de la figura 1.5 conduce a la siguiente expresión

$$\sum_{j=1}^{k} i_j(t)=0 \qquad \forall t \tag{1.1}$$

Evidentemente, la situación es diferente para el caso *c*). Aquí los sentidos de

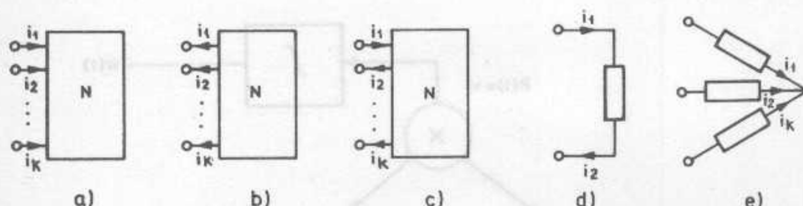



Figura 1.4 Ilustración de KCL.

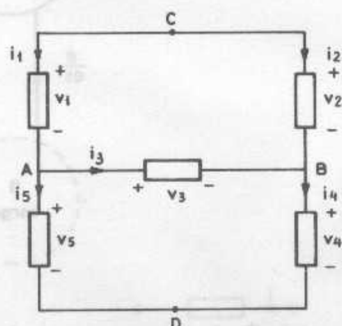



Figura 1.5 Ejemplo aplicación de KCL.

referencia no son todos iguales. Es por ello que la aplicación de KCL conduce a la siguiente expresión

$$i_1 - i_2 - i_3 - \ldots - i_k = 0 \tag{1.2}$$

El caso *d*) sirve para ilustrar que la corriente entrante por uno de los terminales de un elemento ha de ser igual a la que sale por el otro. En efecto, la aplicación de KCL en este caso conduce a la siguiente expresión

$$i_1 - i_2 = 0 \Rightarrow i_1 = i_2 \tag{1.3}$$

Finalmente, el caso *e*) sirve para ilustrar una forma muy corriente de enunciar KCL como que la suma algebraica de corrientes que confluyen en un nodo es nula en cualquier instante de tiempo. Como ejemplo de aplicación en un circuito de KCL considérese el circuito de la figura 1.5.

Una vez se han asignado a las corrientes en los elementos sentidos de referencia, pueden obtenerse las siguientes restricciones topológicas aplicando KCL en los nodos del circuito, entendiendo por nodo el punto en que confluyen dos o más elementos de circuito,

$$\begin{array}{l} \text{Nodo } A\text{: } i_1 = i_3 + i_5 \\ \text{Nodo } B\text{: } i_4 = i_2 + i_3 \\ \text{Nodo } C\text{: } i_1 = -i_2 \\ \text{Nodo } D\text{: } i_4 + i_5 = 0 \end{array} \tag{1.4}$$

El segundo axioma que rige la teoría de circuitos se conoce con el nombre de ley de las tensiones de Kirchhoff (KVL) y dice que el potencial entre dos nodos de un circuito está unívocamente determinado, lo que es equivalente a decir que la suma algebraica de tensiones a lo largo de un camino cerrado es cero en cualquier instante de tiempo. Así por ejemplo, la aplicación de KVL a los distintos caminos cerrados del circuito de la figura 1.5 conduce a estas expresiones

$$\begin{array}{l} \text{Camino } CAB\text{: } v_1 = v_2 - v_3 \\ \text{Camino } ABD\text{: } v_5 = v_3 + v_4 \\ \text{Camino } CADB\text{: } v_1 + v_5 = v_2 + v_4 \end{array} \tag{1.5}$$

## 1.4 ELEMENTOS DE CIRCUITO

Un elemento de circuito queda completamente caracterizado cuando se especifica la relación funcional entre las variables circuitales a él asociadas. En el diagrama de la figura 1.6 se muestran las distintas variables circuitales, sus dependencias, así como los distintos tipos de elementos que surgen al relacionar las distintas variables de circuito.

El elemento resistor establece una relación entre la tensión en sus terminales

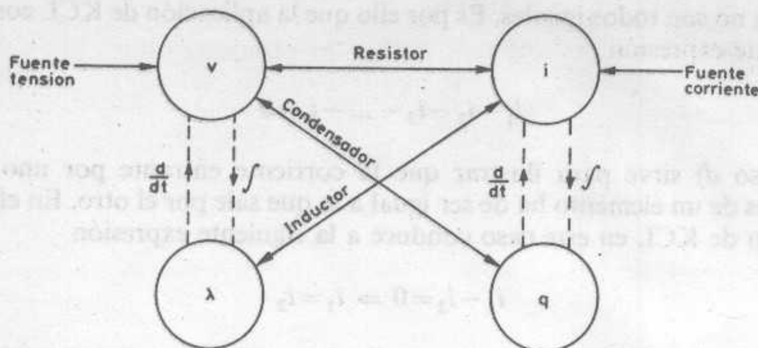



Figura 1.6 Relación variables-elementos de circuito.

y la corriente a través suyo. El elemento condensador la establece entre la carga, cuya derivada es la corriente en el elemento, y la tensión entre sus terminales. El inductor establece relación entre el flujo, cuya derivada es la tensión entre terminales del elemento y la corriente a través del elemento. A estos tres elementos hay que añadir las fuentes de tensión y corriente que, a diferencia de los anteriores, no establecen una relación entre dos variables sino que fijan una de ellas pudiendo la otra tomar cualquier valor. Evidentemente, se podría pensar en otros posibles elementos de circuito que, por ejemplo, relacionaran el flujo con la carga o la derivada de la tensión con la derivada de la corriente. Sin embargo, la experiencia demuestra que con los cinco elementos descritos es posible modelar el comportamiento eléctrico de la mayoría de los dispositivos que integran los circuitos físicos. Otro aspecto importante aparte de la naturaleza específica de los elementos de circuito es el carácter lineal o no lineal de los mismos. Los circuitos constituidos por la interconexión de elementos lineales requieren para su análisis herramientas matemáticas tales como las transformadas de Laplace y Fourier, así como técnicas de solución de sistemas de ecuaciones lineales que son relativamente sencillas si se las compara con las herramientas matemáticas necesarias para el tratamiento de sistemas no lineales. Obviamente, los circuitos lineales tendrán un campo de utilización limitado. Muchos dispositivos electrónicos son por naturaleza fuertemente no lineales y no será posible su estudio mediante modelos circuitales lineales. No obstante, bajo ciertas condiciones de funcionamiento los circuitos lineales pueden ser una buena aproximación, lo que sumado a la sencillez del análisis los hace sumamente atractivos. Es por todo ello que a partir de ahora trataremos exclusivamente con elementos de circuito lineales.

## 1.5 FUENTES O GENERADORES INDEPENDIENTES

Las fuentes independientes son elementos de circuito que se caracterizan por fijar una de las variables fundamentales, pudiendo tomar la otra cualquier valor

| | Fuente de tensión | Fuente de corriente |
|---|---|---|
| Símbolo | + v − i $V_o$ | i + $i_o$ v − |
| Relación v-i | i : arbitraria<br>v: la especificada en el elemento | v : arbitraria<br>i : la especificada en el elemento |
| Característica | v $V_o$ $t_o$ i | v $t_o$ $I_o$ i |

Figura 1.7 Características de fuentes de tensión y corriente.

que vendrá determinado por el resto del circuito. Los hay de dos tipos: generadores de tensión y generadores de corriente. La variable que fijan puede ser constante o variable con el tiempo. En la tabla de la figura 1.7 se muestran los símbolos y características de estos elementos.

## 1.6 ELEMENTOS DE CIRCUITO LINEALES

Los elementos de circuito lineales son aquellos de naturaleza resistiva, inductiva o capacitiva en los que la relación funcional es lineal. La tabla de la figura 1.8 muestra sus símbolos y características más importantes.

El resistor lineal es un elemento de circuito que, tal como muestra la tabla de la figura 1.8, establece una relación entre la corriente y la tensión entre sus terminales (convención pasiva) dada por la expresión

$$v(t) = R\,i(t) \tag{1.6}$$

El elemento resistor lineal queda completamente caracterizado por el parámetro $R$, que se llama resistencia del resistor y en el sistema MKS se mide en ohmios (Ω) (k$\Omega = 10^3$ Ω, M$\Omega = 10^6$ Ω). Su inverso $G$ recibe el nombre de conductancia y su unidad es el siemens.

Hay dos casos particulares de especial interés que corresponden a $R = 0$ y $R = \infty$.

Para $R = 0$, tal como muestra la figura 1.9, la tensión en terminales del resistor es cero pudiendo la corriente tomar cualquier valor. A esta

| | Resistor lineal | Condensador lineal | Inductor lineal |
|---|---|---|---|
| Símbolo | i, + v − | q, + v − | i, + λ − |
| Característica | v / i, pendiente R | q / v, pendiente C | λ / i, pendiente L |
| Relación fundamental | $v = Ri$<br>R: resistencia<br>$G = 1/R$: conductancia | $q = Cv$<br>C: capacidad | $\lambda = Li$<br>L: inductancia |
| Relación v-i | $v = Ri$ | $i = C\dfrac{dv}{dt}$<br>$v = v(0^-) + \dfrac{1}{C}\int_{0^-}^{t} i(\tau)\,d\tau$ | $v = L\dfrac{di}{dt}$<br>$i = i(0^-) + \dfrac{1}{L}\int_{0^-}^{t} v(\tau)\,d\tau$ |
| Modelo circuital | i, + v − | i, C, + $v(0^-)$ − | $i(0^-)$, i, L, + v − |

Figura 1.8 Características de elementos de circuito lineales.

característica nos referiremos con el nombre de cortocircuito (short-circuit SC). En el caso de $R = \infty$ la corriente será nula pudiendo la tensión tomar cualquier valor. Corresponde, por tanto, al circuito abierto (open-circuit OC). La potencia suministrada al resistor vendrá dada por la expresión siguiente

$$p(t) = v(t)\,i(t) = R\,i^2(t) = G\,v^2(t) \qquad (1.7)$$

Si $R$ es una constante real positiva y dado que $i^2(t)$ o $v^2(t)$ son no negativas, siempre se cumplirá que la potencia suministrada al resistor es no negativa. Por consiguiente, la energía suministrada al resistor, que viene dada por la integral de la potencia, será una función monótona creciente, lo que justifica que el resistor lineal modele los fenómenos de disipación de energía eléctrica.

El condensador lineal es un elemento de circuito que establece una relación

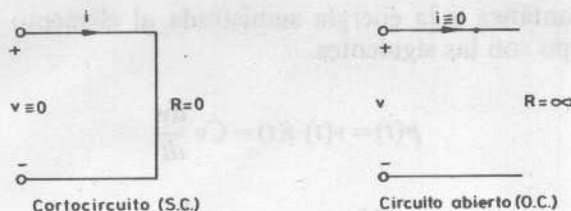



Figura 1.9 Circuito abierto y cortocircuito.

lineal entre la carga que se le suministra y la tensión entre sus terminales dada por esta ecuación

$$q(t) = Cv(t) \tag{1.8}$$

Teniendo en cuenta que la carga está relacionada con la corriente, acostumbra a expresarse también de la siguiente forma

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C\frac{dv}{dt} \tag{1.9}$$

El parámetro $C$ recibe el nombre de capacidad del condensador y en el sistema MKS se mide en faradios ($\mu F = 10^{-6}$ F, $nF = 10^{-9}$ F, $pF = 10^{-12}$ F). Entre las propiedades más importantes del condensador cabe destacar, en primer lugar, que si la tensión entre sus terminales queda fijada a un valor constante, entonces la corriente que lo atraviesa será nula, comportándose el condensador como un circuito abierto, como se deduce de (1.9), al ser cero la derivada de una constante. En segundo lugar, la tensión en terminales de un condensador no puede variar instantáneamente ya que, de acuerdo con (1.9), ello requeriría una corriente infinita, que si bien matemáticamente es concebible [función $\delta(t)$] no tiene correspondencia física real. Finalmente, despejando en (1.9) la tensión en terminales del condensador se obtiene

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)\, d\tau + v(t_0) \tag{1.10}$$

La expresión (1.10) nos muestra el carácter del condensador lineal como elemento de circuito con memoria. En efecto, conocer la tensión en bornes del elemento en un cierto instante de tiempo $t$ requiere conocer la historia, esto es, la corriente que ha recorrido el elemento desde una cierta referencia temporal $t_0$ y la tensión en terminales del elemento en ese mismo instante $t_0$. La ecuación (1.10) nos permite, tal como muestra la tabla de la figura 1.8, obtener el circuito equivalente de un condensador en un circuito incorporando un generador de tensión que resume la historia del elemento hasta el instante que se utilice como origen de tiempos.

En lo que al carácter energético del elemento se refiere, las expresiones para

la potencia instantánea y la energía sumistrada al elemento hasta un cierto instante de tiempo son las siguientes

$$p(t) = v(t)\ i(t) = Cv\frac{dv}{dt} \quad (1.11)$$

$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\tau)\ d\tau = \frac{1}{2}\ Cv^2(t) \quad (1.12)$$

La expresión (1.12) nos revela el carácter pasivo y almacenador de energía del elemento. Basta con elevar la tensión en terminales del condensador para aumentar la energía que de nuevo puede recuperarse disminuyendo esa misma tensión.

El elemento inductor lineal tiene un comportamiento dual del condensador intercambiando el papel de las variables *v-i*. En un inductor lineal se verifica la siguiente ecuación

$$\lambda(t) = L\, i(t) \quad (1.13)$$

Pero teniendo en cuenta la relación entre las variables flujo y tensión la expresión (1.13) conduce a esta relación *v-i* en el inductor lineal

$$v(t) = L\frac{di}{dt} \quad (1.14)$$

En (1.14) el parámetro $L$ es la inductancia del inductor y en el sistema MKS se mide en henrios ($\text{mH} = 10^{-3}$ H, $\mu\text{H} = 10^{-6}$ H).

Entre las propiedades importantes del inductor lineal cabe destacar, en primer lugar, que si está recorrido por una corriente constante la tensión entre sus terminales será nula, tal como exige (1.14), por lo que en esas condiciones equivale a un cortocircuito. Tampoco en este caso puede la corriente a través de un inductor variar instantáneamente pues ello provocaría una tensión infinita en terminales del elemento. Finalmente, despejando la corriente en (1.14) se obtiene

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau + i(t_0) \quad (1.15)$$

La ecuación (1.15) muestra el carácter del inductor como elemento con memoria. Para conocer la corriente que atraviesa un inductor en un cierto instante $t$ es preciso conocer la tensión entre sus terminales desde un origen de tiempo $t_0$ y la corriente en el inductor en ese mismo instante. La interpretación de (1.15) como ecuación KCL conduce al modelo circuital para el inductor que se muestra en la tabla de la figura 1.8, en donde el generador de corriente $i(t_0)$ resume la historia del elemento hasta dicho origen de tiempos.

En cuanto al carácter energético del elemento, las expresiones (1.16) y (1.17)

evidencian el carácter pasivo y almacenador de energía al igual que ocurre en el condensador

$$p(t) = v(t)\, i(t) = L\, i(t)\, \frac{di}{dt} \tag{1.16}$$

$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\tau) d\tau = \frac{1}{2} L\, i^2(t) \tag{1.17}$$

## 1.7 FUENTES CONTROLADAS LINEALES

Al conjunto de elementos de circuito lineales, inductor, condensador y resistor, cabe añadir las fuentes controladas o transductores. Estos elementos servirán para modelar transferencias controladas de energía y, por tanto, son indispensables en la modelación circuital de dispositivos electrónicos que se

| SIMBOLO | DENOMINACION | PARAMETRO |
| --- | --- | --- |
| + v − ; N ; + kv − | Fuente de tensión controlada por tensión (VVT) | k: amplificación |
| + v − ; N ; gv | Fuente de corriente controlada por tensión (VCT) | g (℧) transconductancia |
| i ; N ; + ri − | Fuente de tensión controlada por corriente (CVT) | r (Ω): transresistencia |
| i ; N ; ∝i | Fuente de corriente controlada por corriente (CCT) | ∝: amplificación de corriente |

Figura 1.10 Tipos de fuentes controladas.

basan en la modulación de tensiones o corrientes por otra variable circuital, como es el caso de transistores y amplificadores operacionales.

Las fuentes controladas son elementos de circuito similares a las fuentes independientes, pero en lugar de especificar la tensión o corriente propia, ésta es función de la tensión o corriente en otro elemento del mismo circuito. Si la ley de control es lineal, resultan los cuatro tipos de fuentes controladas de la tabla de la figura 1.10.

## 1.8 BASES DEL ANALISIS: METODOS SISTEMATICOS

Dado un circuito lineal, esto es, constituido por la interconexión de elementos de circuito lineales y fuentes de tensión o corriente, el análisis de dicho circuito tiene por objeto la determinación de la tensión y corriente en cada uno de los elementos del circuito. Admitiendo que el circuito tiene solución y que ésta es única, su determinación requerirá plantear un sistema de $2b$ ecuaciones linealmente independientes para un circuito con $b$ elementos, ya que son dos las variables a determinar en cada elemento. De las $2b$ ecuaciones linealmente independientes, $b$ serán precisamente las relaciones tensión-corriente en cada uno de los elementos. Las restantes $b$ ecuaciones surgen de las restricciones topológicas del circuito, y se obtienen mediante KCL y KVL. Es aquí que surge el primer problema. En efecto, el número de KCL y KVL que puede plantearse en un circuito es superior siempre al número de elementos $b$ y, por tanto, no todos los KCL y KVL son linealmente independientes.

Una solución al problema y cuya demostración hacemos en el capítulo 2 consiste en aplicar KCL en $n$ nodos del circuito, siendo $n+1$ el número total de nodos del circuito, y plantear los KVL en las $b-n$ mallas del circuito, entendiendo por malla aquel camino cerrado que no encierra otros en su interior.

Una vez planteado el sistema de $2b$ ecuaciones, que en general será integro-diferencial debido a la presencia de condensadores e inductores, bastaría solucionarlo para dar por concluido el problema del análisis, aunque ciertamente ello requeriría un gran esfuerzo tanto en el planteamiento de las ecuaciones como en su solución por limitado que sea el número de elementos en el circuito.

Las dificultades apuntadas en el problema del análisis pueden minimizarse a partir del concepto de variables generadoras. Se entiende por conjunto de variables generadoras en un circuito a aquellas tensiones o corrientes que una vez determinadas permiten expresar fácilmente por suma o diferencia las restantes del circuito de la misma naturaleza. Dos son fundamentalmente los conjuntos de variables generadoras que se utilizan: Las tensiones nodales con respecto al nodo de referencia y las corrientes de malla.

En efecto, en un circuito con $n+1$ nodos, si se asigna un potencial a cada uno de los $n$ nodos con respecto al nodo restante (nodo datum), cualquier tensión entre terminales de elementos puede expresarse fácilmente en función de esas $n$ tensiones nodales. Así por ejemplo, en el circuito de la figura 1.11 hay 5 elementos y 4 nodos. Las tensiones $v_a$, $v_b$, $v_c$ son las existentes entre cada uno de

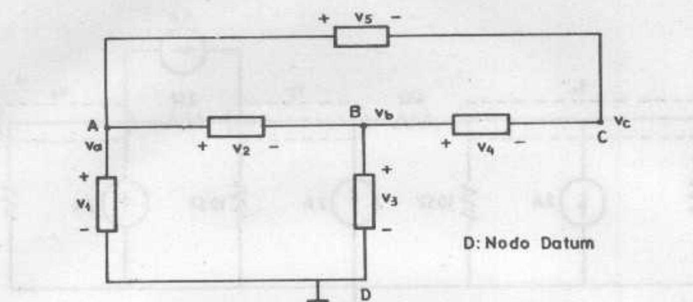



Figura 1.11 Carácter generador de las tensiones nodales.

los nodos A, B, C y el nodo D que se toma como nodo de referencia. Pues bien, cualquier tensión entre terminales de los elementos o bien coincide con una de las nodales o puede obtenerse por diferencia de las nodales (1.18). De aquí el carácter de variables generadoras.

$$\begin{aligned} v_1 &= v_a \\ v_2 &= v_a - v_b \\ v_3 &= v_b \\ v_4 &= v_b - v_c \\ v_5 &= v_a - v_c \end{aligned} \tag{1.18}$$

El carácter generador de las tensiones nodales sugiere la posibilidad de analizar circuitos planteando un número reducido de ecuaciones. En efecto, si con dichas tensiones nodales se logra plantear un sistema de $n$ ecuaciones linealmente independientes, su resolución permitirá conocer dichas tensiones nodales. Además, y puesto que son variables generadoras, cualquier otra variable en los elementos podrá determinarse fácilmente por suma o diferencia de aquéllas si es una tensión. Si es la corriente en un elemento, se podrá obtener a partir de la tensión en el mismo elemento haciendo intervenir la característica *vi* de dicho elemento.

El método de análisis nodal, cuya demostración se hará con todo rigor en el capítulo 2, permite analizar un circuito basándose en un número reducido de ecuaciones que utiliza como variables las tensiones nodales. Consiste este método en seleccionar uno cualquiera de los $n+1$ nodos del circuito y asignar a los $n$ restantes una tensión con respecto al que se eligió como nodo de referencia o datum. A continuación se plantean en cada uno de los $n$ nodos un KCL, pero expresando las corrientes confluyentes en función de las tensiones nodales, haciendo intervenir para ello la característica *v-i* de los distintos elementos que están conectados al nodo en el que se está aplicando el KCL. Se obtiene así un sistema de ecuaciones linealmente independiente cuya resolución suministrará el valor de las tensiones nodales. Cualquier otro tipo de variable podrá fácilmente expresarse en función de esas tensiones dado su carácter de variables generadoras.

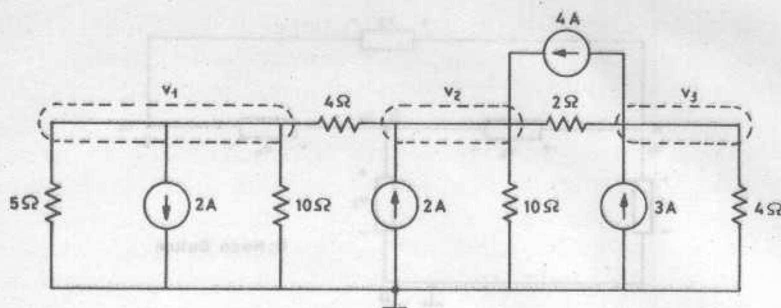



Figura 1.12 Análisis nodal. Ejemplo de aplicación.

Como ejemplo ilustrativo considérese el circuito de la figura 1.12. Tiene 10 elementos y 4 nodos. El método nodal permite analizar el circuito planteando un sistema de $4-1=3$ ecuaciones que se obtendrán aplicando KCL en tres de los nodos. La secuencia a seguir es la siguiente:

*a*) Seleccionar el nodo datum y asignar a los restantes un potencial con respecto al de referencia: $v_1$, $v_2$, $v_3$.

*b*) Aplicar KCL a cada uno de los tres nodos, utilizando como variables las tensiones nodales

$$\text{Nodo } v_1\text{: } -2-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\right)v_1-\frac{1}{4}(v_1-v_2)=0$$

$$\text{Nodo } v_2\text{: } (v_1-v_2)\frac{1}{4}+2+4-\frac{1}{10}v_2-\frac{1}{2}(v_2-v_3)=0 \qquad (1.19)$$

$$\text{Nodo } v_3\text{: } -4-\frac{1}{4}v_3+3+\frac{1}{2}(v_2-v_3)=0$$

*c*) Escritura en forma matricial y solución del sistema

$$\begin{bmatrix} 0{,}55 & -0{,}25 & 0 \\ -0{,}25 & 0{,}85 & -0{,}50 \\ 0 & -0{,}50 & 0{,}75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad (1.20)$$

$$v_1=\frac{0{,}225}{0{,}166}=1{,}36\text{ V} \qquad v_2=\frac{1{,}825}{0{,}166}=10{,}99\text{ V} \qquad v_3=\frac{0{,}995}{0{,}166}=5{,}99\text{ V}$$

Obsérvese que al no incorporar el circuito inductores o condensadores, el sistema de ecuaciones que se obtiene es algebraico; en el caso general será integrodiferencial. Por otra parte, y tal como se verá con todo detalle en el

capítulo 2, puede comprobarse que el sistema de ecuaciones (1.20) podía haberse obtenido directamente por simple inspección del circuito.

En efecto, los elementos de la diagonal principal corresponden a la suma de las conductancias que confluyen a cada uno de los nodos. El resto de los elementos de la matriz coincide con la suma cambiada de signo de las conductancias que conectan a cada nodo con los restantes. Finalmente, el vector de términos independientes se construye considerando la suma algebraica de corrientes procedentes de generadores que incide en cada nodo.

Un segundo conjunto de variables generadoras son las corrientes de malla. Son éstas corrientes que se asignan en sentido horario a cada una de las mallas de un circuito plano (las mallas no pueden definirse en circuitos no planos). Las corrientes de mallas permiten determinar la corriente en cualquier elemento de un circuito bien sea por identificación directa o, a lo más, por diferencia de dos de malla. El número de mallas de un circuito con $b$ elementos y $n+1$ nodos es $b-n$, por lo que al igual que ocurre con las tensiones nodales, si se logra plantear, con las corrientes de malla como variables, un sistema de ecuaciones linealmente independientes, se habrá resuelto el problema del análisis de circuitos utilizando un número reducido de ecuaciones.

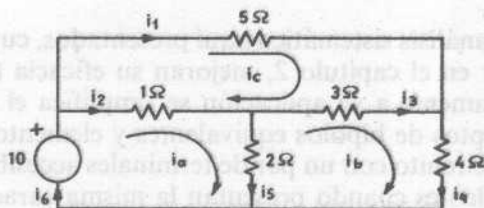


Figura 1.13 Análisis de mallas. Ejemplo de aplicación.

Como ejemplo ilustrativo del carácter generador de las corrientes de malla, considérese el circuito de la figura 1.13. Si asignamos a las mallas corrientes $i_a$, $i_b$, $i_c$, las corrientes en los elementos se expresan en función de las de malla del siguiente modo

$$\begin{aligned} i_1 &= i_c & i_4 &= i_b \\ i_2 &= i_a - i_c & i_5 &= i_a - i_b \\ i_3 &= i_b - i_c & i_6 &= i_a \end{aligned} \tag{1.21}$$

El método de análisis de las corrientes de malla consiste en aplicar KVL a cada una de las mallas expresando las tensiones de los elementos en función de las corrientes de malla, haciendo intervenir para ello las relaciones $v$-$i$ de los elementos. El sistema así obtenido es linealmente independiente tal como se

demostrará en el capítulo 2. Así por ejemplo, para el circuito de la figura 1.13 las ecuaciones de malla serán las siguientes

$$\text{Malla } i_a\text{: } 10-(i_a-i_c)-2(i_a-i_b)=0$$

$$\text{Malla } i_b\text{: } 2(i_a-i_b)-3(i_b-i_c)-4i_b=0 \qquad (1.22)$$

$$\text{Malla } i_c\text{: } -5i_c-3(i_c-i_b)-(i_c-i_a)=0$$

Reordenando las ecuaciones anteriores y escribiendo (1.22) en forma matricial se obtiene lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 9 & -3 \\ -1 & -3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (1.23)$$

$$i_a = \frac{720}{159} \quad ; \quad i_b = \frac{210}{159} \quad ; \quad i_c = \frac{150}{159}$$

Los métodos de análisis sistemático aquí presentados, cuya demostración se hará con todo rigor en el capítulo 2, mejoran su eficacia (menor número de ecuaciones) si previamente a su aplicación se simplifica el circuito a analizar utilizando los conceptos de bipolos equivalentes y elementos superfluos.

Un bipolo es un circuito con un par de terminales accesibles. Dos bipolos se dice que son equivalentes cuando presentan la misma característica *v-i* en sus terminales. Basándose en el carácter equivalente de bipolos, la estrategia a seguir previa a la aplicación de las técnicas de análisis sistemático consistirá en la sustitución de bipolos por equivalentes más sencillos.

De entre las equivalencias más usuales, aparte de las de las conexiones serie y paralelo, cabe destacar las transformaciones Thevenin-Norton que permiten transformar el bipolo constituido por la conexión serie de una fuente de tensión y un resistor por otro bipolo constituido por la conexión en paralelo de una fuente de corriente y un resistor, tal como se muestra en la figura 1.14.

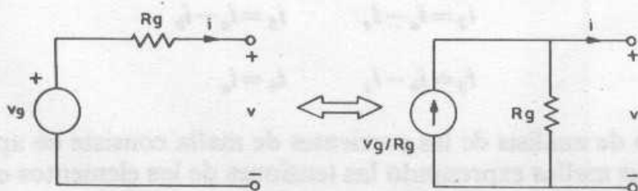


Figura 1.14 Equivalencia Thevenin-Norton.

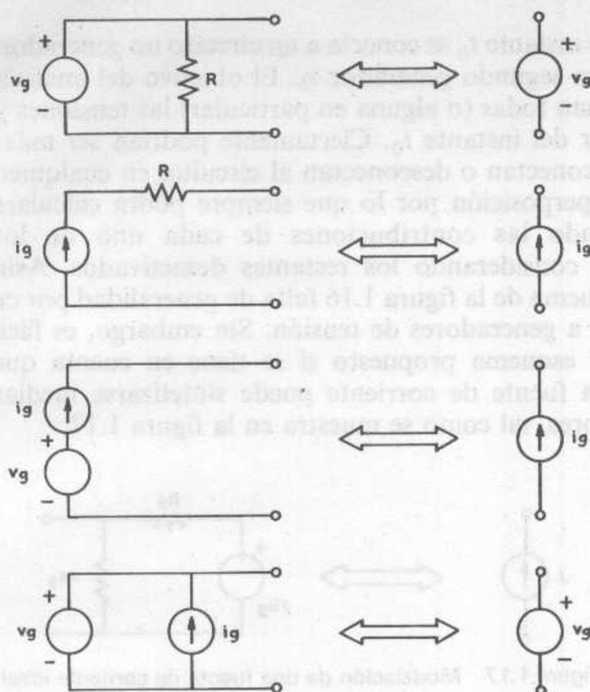



Figura 1.15 Elementos superfluos.

La aplicación del concepto de bipolo equivalente a los casos que se presentan en la tabla de la figura 1.15 conduce a bipolos más sencillos en los que la supresión de algunos elementos deja inalterada la característica *v-i*, por lo que a dichos elementos se les considera superfluos.

## 1.9 ANALISIS DE CIRCUITOS GENERALES: METODO CLASICO

El formato más general de un problema de análisis de circuitos lineales es el que aparece esquematizado en la figura 1.16.

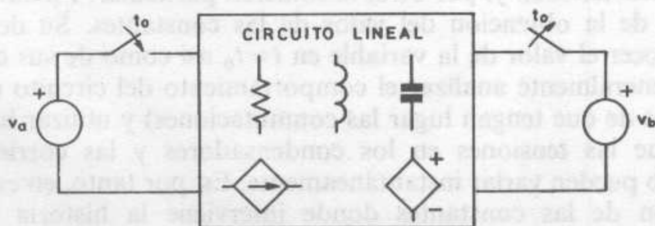



Figura 1.16 Problema genérico de análisis.

En un cierto instante $t_0$ se conecta a un circuito un generador de tensión $v_a$ y se desconecta un segundo generador $v_b$. El objetivo del análisis es determinar cómo evolucionan todas (o alguna en particular) las tensiones y corrientes del circuito a partir del instante $t_0$. Ciertamente podrían ser más las fuentes de tensión que se conectan o desconectan al circuito, en cualquier caso aplica el principio de superposición por lo que siempre podrá calcularse la respuesta deseada sumando las contribuciones de cada uno de los generadores independientes, considerando los restantes desactivados. Asimismo, podría objetarse al esquema de la figura 1.16 falta de generalidad por cuanto restringe las excitaciones a generadores de tensión. Sin embargo, es fácil demostrar la generalidad del esquema propuesto si se tiene en cuenta que a efectos de modelación una fuente de corriente puede sintetizarse mediante fuentes de tensión y resistores, tal como se muestra en la figura 1.17.

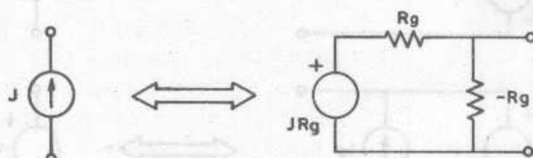



Figura 1.17 Modelación de una fuente de corriente ideal.

Hay varios procedimientos para abordar el problema propuesto. En este apartado presentaremos el método clásico que, aunque no sea de utilidad práctica, permitirá poner de manifiesto la necesidad de desarrollar métodos más operativos como son los transformados. El método clásico para el análisis de circuitos generales se basa en obtener la ecuación diferencial que rige la evolución temporal de la variable de interés y su posterior resolución. Para ello, en primer lugar, se plantean en el circuito las ecuaciones de mallas o de nodos. Se obtiene así un sistema de ecuaciones integrodiferenciales que a su vez puede transformarse por derivación en un sistema de ecuaciones diferenciales. En este sistema, las variables dependientes serán las generadoras y, por tanto, podrá reducirse sin dificultad obteniéndose la ecuación diferencial correspondiente a la variable circuital deseada. La solución de esta ecuación diferencial requerirá por una parte determinar la solución de la homogénea y, por tanto, solución del polinomio característico y, por otra, la solución particular. Finalmente, queda el problema de la obtención del valor de las constantes. Su determinación requiere conocer el valor de la variable en $t=t_0$ así como de sus derivadas, lo cual exige generalmente analizar el comportamiento del circuito en $t=t_0$ (un instante antes de que tengan lugar las conmutaciones) y utilizar hábilmente el hecho de que las tensiones en los condensadores y las corrientes en los inductores no pueden variar instantáneamente. Es, por tanto, en esta fase de la determinación de las constantes donde interviene la historia del circuito concretada en los generadores de condiciones iniciales en inductores y condensadores.

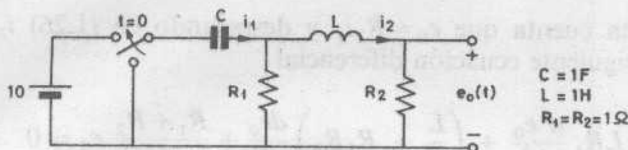


Figura 1.18 Ejemplo de aplicación. Método clásico.

Como ejemplo de aplicación de la técnica de análisis de circuitos por el método clásico considérese el circuito de la figura 1.18 en el que se trata de determinar la evolución de la tensión $e_0(t)$.

Podemos distinguir tres fases diferentes en el circuito de la figura 1.18. La primera comprende $-\infty < t < 0-$ es decir, hasta un instante antes de que tenga lugar la conmutación. Dado que la excitación en esta fase es nula, también lo serán todas las tensiones y corrientes y, por tanto, $e_0(t)=0$ en esta fase. La segunda fase corresponde a $0^- < t < 0^+$, es decir, que abarca el instante en que la excitación pasa de valor cero a valor diez voltios. La última fase comprende el intervalo $t \geqslant 0^+$ en que la excitación aplicada al circuito es constante y de valor diez voltios. El modelo equivalente para esta tercera fase es el que se muestra en la figura 1.19.

El análisis por corrientes de malla del circuito de la figura 1.19 conduce al siguiente sistema de ecuaciones integrodiferenciales

$$\text{Ec. malla } i_1\text{: } \frac{1}{C}\int_{0^+}^{t} i_1(\tau)d\tau + R_1(i_1 - i_2) = 10 \tag{1.24}$$

$$\text{Ec. malla } i_2\text{: } R_1(i_2 - i_1) + L\frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 = 0 \tag{1.25}$$

Derivando la ecuación (1.24) y representando por $D$ el operador derivación, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{C} + DR_1 & -DR_1 \\ -R_1 & R_1 + R_2 + DL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.26}$$

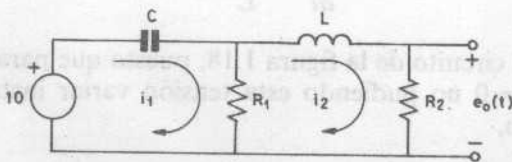


Figura 1.19 Circuito equivalente para $t>0$.

Teniendo en cuenta que $e_0 = R_2 i_2$ y despejando en (1.26) $i_2$, se obtiene finalmente la siguiente ecuación diferencial

$$LR_1 \frac{d^2 e_0}{dt^2} + \left(\frac{L}{C} + R_1 R_2\right) \frac{de_0}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{C} e_0 = 0 \qquad (1.27)$$

Particularizando la ecuación (1.27) para los valores de los elementos que se indican en la figura 1.18 resulta

$$\frac{d^2 e_0}{dt^2} + 2\frac{de_0}{dt} + 2e_0 = 0 \qquad (1.28)$$

El polinomio característico $D^2 + 2D + 2 = 0$ tiene por raíces $d_{1,2} = -1 \pm j$, por lo que la solución de la ecuación (1.28) es la siguiente

$$e_0(t) = e^{-t}\,(A \cos t + B \operatorname{sen} t) \qquad (1.29)$$

La expresión (1.29) representa la forma de la evolución dinámica de la tensión $e_0(t)$ y es válida para $t \geqslant 0^+$. La determinación de las constantes $A$ y $B$ requerirá conocer $e_0(0^+)$ así como su derivada. Volviendo de nuevo al circuito de la figura 1.18, es fácil comprobar que $e_0(0^-) = e_0(0^+)$. En efecto, $e_0 = R_2 i_2$ y al ser $i_2$ la corriente en un inductor, ésta no puede variar instantáneamente y, por tanto, tampoco $e_0$. Puesto que $e_0(0^-) = 0$ también lo será $e_0(0^+)$. Incorporando esta información en (1.29) resulta

$$e_0(0^+) = 0 = e^{-t}(A \cos t + B \operatorname{sen} t) \Big|_{t=0^+} = A \qquad (1.30)$$

En cuanto al valor de la derivada de $e_0$ en el instante $t = 0^+$ y de nuevo en el circuito de la figura 1.19, podemos escribir las siguientes ecuaciones

$$e_0(t) = R_2 i_2(t) \Rightarrow \frac{de_0}{dt} = R_2 \frac{di_2}{dt} \qquad (1.31)$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que la tensión en terminales del inductor es $v_L = L di_2/dt$, se obtiene, incorporando este dato en (1.31), la siguiente expresión para la derivada de $e_0$

$$\frac{de_0}{dt} = \frac{R_2}{L} v_L \qquad (1.32)$$

y de nuevo sobre el circuito de la figura 1.18, puesto que para $t = 0^-$ se cumple que $i_1 = i_2 = 0$ y $v_c = 0$ no pudiendo esta tensión variar instantáneamente, se cumplirá, por tanto,

$$v_L(0^+) = 10 \qquad (1.33)$$

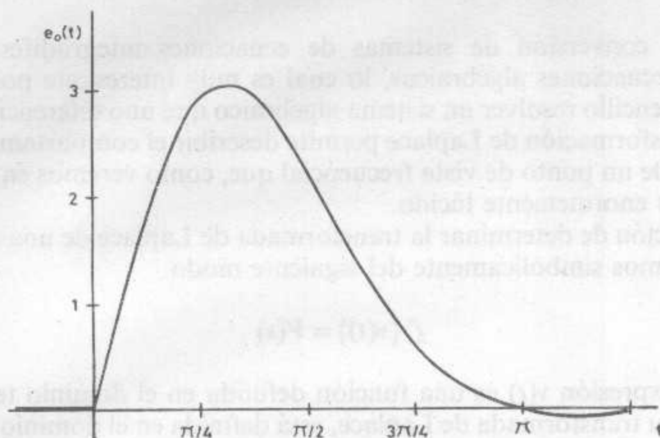


Figura 1.20 Gráfica de la tensión $e_0(t)$

Incorporando (1.33) en (1.32) y teniendo en cuenta (1.31) se obtiene finalmente

$$\frac{de_0}{dt}\bigg|_{t=0^+} = -Be^{-t}\ \text{sen}\, t + Be^{-t}\cos t\ \bigg|_{t=0^+} = B = 10 \qquad (1.34)$$

En resumen, se han obtenido estos dos resultados

$$\text{Para } t < 0^- \qquad e_0(t) = 0 \qquad (1.35)$$

$$\text{Para } t \geqslant 0^+ \qquad e_0(t) = 10\ e^{-t}\ \text{sen}\, t \qquad (1.36)$$

Por otra parte, al no poder variar $i_2$ instantáneamente tampoco lo puede hacer $e_0$; por consiguiente, en el instante mismo de la conmutación habrá continuidad en el valor de la tensión $e_0$. Se puede, por tanto, concluir que la evolución de la tensión $e_0$ en el circuito de la figura 1.18 responde a la siguiente expresión, cuya gráfica se muestra en la figura 1.20

$$e_0(t) = (10e^{-t}\ \text{sen}\, t)\ u(t) \qquad (1.37)$$

## 1.10 LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

La transformación de Laplace es un proceso matemático mediante el cual funciones definidas en el dominio temporal $t$ son convertidas en funciones definidas en el dominio complejo $s$. Los motivos que hacen interesante una transformación de este tipo en el análisis de circuitos son de dos tipos. Por una parte, tal como veremos en este apartado, la transformación de Laplace

posibilita la conversión de sistemas de ecuaciones integrodiferenciales en sistemas de ecuaciones algebraicas, lo cual es muy interesante por cuanto es mucho más sencillo resolver un sistema algebraico que uno diferencial. Por otra parte, la transformación de Laplace permite describir el comportamiento de los circuitos desde un punto de vista frecuencial que, como veremos en posteriores apartados, es enormemente lúcido.

La operación de determinar la transformada de Laplace de una función $v(t)$ la representamos simbólicamente del siguiente modo

$$\mathcal{L}\{v(t)\} = V(s) \tag{1.38}$$

En esta expresión $v(t)$ es una función definida en el dominio temporal $t$ y $V(s)$, que es su transformada de Laplace, está definida en el dominio frecuencial complejo $s$, que recibe esta denominación ya que la variable $s$ es compleja e igual a $\sigma + j\omega$ y en el sistema MKS tiene dimensiones de rad/s.

La transformada de Laplace de una función $v(t)$ se define del siguiente modo

$$\mathcal{L}\{v(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} v(t)e^{-st}dt \tag{1.39}$$

Esta definición involucra una integral impropia que converge siempre que la función $v(t)$ tenga un número finito de discontinuidades y sea de orden exponencial. Afortunadamente, la mayoría de funciones que aparecen en el análisis de circuitos están incluidas en esa categoría.

La definición hecha en (1.39) utiliza como límite inferior de integración $0^-$, esto es un instante antes de $t=0$. La razón hay que buscarla en el formato de los problemas de análisis de circuitos que mostrábamos en la figura 1.16. La excitación del circuito se aplica en un cierto instante que tomamos como origen de tiempos $t=0$. Esto generalmente ocasiona discontinuidades en las variables circuitales que es preciso captar con toda precisión. Por consiguiente, la transformada de Laplace se ha de calcular desde un instante anterior.

Como ejemplo de aplicación considérese el cálculo de la transformada de Laplace de la función escalón unitario $u(t)$. La función $u(t)$ tal como se muestra en la figura 1.21 vale cero para $t<0$ y uno para $t>0$; es, por tanto, sumamente útil para modelar, por ejemplo, la inserción de un generador en un circuito mediante un interruptor que se cierra en un cierto instante. Aplicando la definición dada en (1.39) se obtendrá lo siguiente

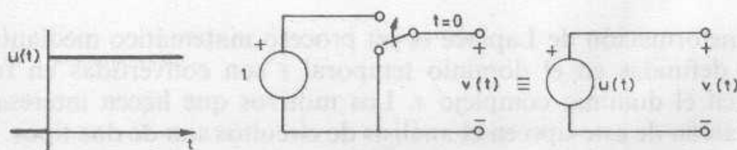



Figura 1.21 Modelación mediante la función escalón

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} u(t)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_{0^-}^{\infty} = \frac{1}{s} \quad (1.40)$$

Un segundo ejemplo de interés es el cálculo de la transformada de Laplace de la función exponencial decreciente $v(t)=Ae^{-t/\tau}u(t)$ cuya representación gráfica se muestra en la figura 1.22.

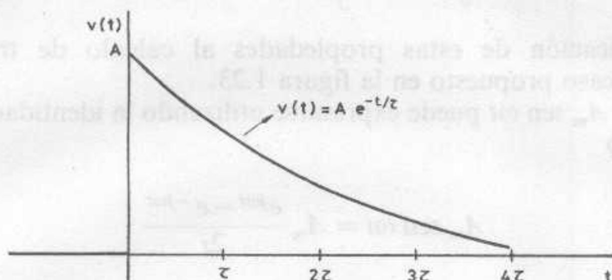



Figura 1.22 Excitación exponencial decreciente.

Aplicando de nuevo la definición se obtiene para esta función la siguiente transformada

$$\mathcal{L}\{Ae^{-t/\tau}u(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} Ae^{-t/\tau}e^{-st}dt = \int_{0^-}^{\infty} Ae^{-(s+1/\tau)t}dt = \frac{1}{s+1/\tau} \quad (1.41)$$

El cálculo de transformadas de Laplace puede simplificarse notablemente haciendo uso de las siguientes propiedades:

*a*) La transformada de Laplace es un operador lineal.
Quiere esto decir que si $\mathcal{L}\{v_1(t)\}=V_1(s)$ y $\mathcal{L}\{v_2(t)\}=V_2(s)$ se cumplirá

$$\mathcal{L}\{Av_1(t)+Bv_2(t)\} = AV_1(s)+BV_2(s) \quad (1.42)$$

*b*) La transformada de Laplace de la derivada de una función $v(t)$ puede expresarse en función de $\mathcal{L}\{v(t)\}=V(s)$ del siguiente modo

$$\mathcal{L}\{v(t)\} = V(s)$$

$$\mathcal{L}\ \frac{dv}{dt} = sV(s) - v(0^-) \quad (1.43)$$

Para derivadas de orden superior, por iteración, se obtienen resultados similares, y así para la derivada segunda puede escribirse

$$\mathcal{L}\ \frac{d^2v}{dt^2} = s^2V(s) - sv(0^-) - \frac{dv}{dt}\Big|_{t=0^-} \quad (1.44)$$

*c*) La transformada de Laplace de la integral de $v(t)$ puede expresarse en función de la $\mathcal{L}\{v(t)\} = V(s)$ del siguiente modo

$$\mathcal{L}\{v(t)\} = V(s)$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_{0^-}^{t} v(t)\,dt\right\} = \frac{1}{s}\,V(s) \tag{1.45}$$

Como aplicación de estas propiedades al cálculo de transformadas, considérese el caso propuesto en la figura 1.23.

La función $A_m$ sen $\omega t$ puede expresarse utilizando la identidad de Euler del siguiente modo

$$A_m \operatorname{sen} \omega t = A_m \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \tag{1.46}$$

Por consiguiente, y aplicando linealidad se obtiene finalmente

$$\mathcal{L}\{A_m \operatorname{sen} \omega t\} = \mathcal{L}\left\{A_m \frac{e^{j\omega t}}{2j}\right\} - \mathcal{L}\left\{A_m \frac{e^{-j\omega t}}{2j}\right\} =$$

$$= \frac{A_m}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega}\right) = A_m \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \tag{1.47}$$

De forma similar, partiendo de las transformadas de las funciones escalón y exponencial decreciente junto con las propiedades anteriormente descritas, se ha obtenido la tabla de transformadas de Laplace que con más frecuencia aparecen en el análisis de circuitos.

Tan importante en análisis de circuitos, como veremos proximamente, es la determinación de la transformada de Laplace de una función como el proceso

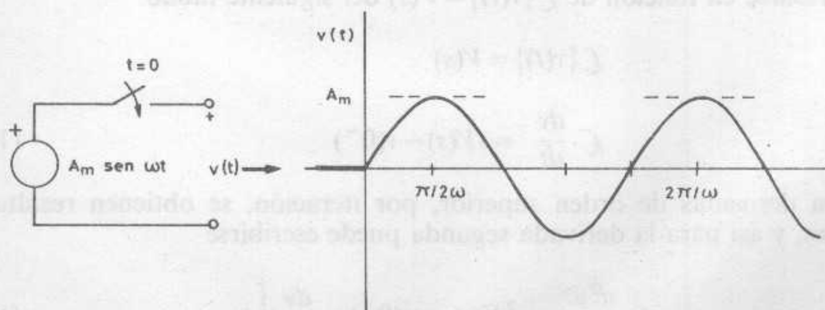



Figura 1.23 Excitación senoidal.

| FUNCION | FORMA DE ONDA | TRANSFORMADA |
|---|---|---|
| Escalón $v(t)$ | | $1/s$ |
| Impulso $\delta(t)$ | | $1$ |
| Rampa $tu(t)$ | | $1/s^2$ |
| Exponencial $Ae^{-t/\tau}u(t)$ | | $\frac{A}{s+1/\tau}$ |
| Rampa amortiguada $Ate^{-t/\tau}u(t)$ | | $\frac{A}{(s+1/\tau)^2}$ |
| Senoide $A_m$ sen $\omega t\, u(t)$ | | $A_m \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ |
| Senoide $A_m \cos \omega t\, u(t)$ | | $A_m \frac{s}{s^2+\omega^2}$ |
| Senoide amortiguada $A_m e^{-t/\tau}$sen $\omega t\, u(t)$ | | $A_m \frac{\omega}{(s+1/\tau)^2+\omega^2}$ |

Figura 1.24 Tabla de transformadas de Laplace más usuales.

inverso que permite recuperar la función en el dominio temporal a partir de una transformada de Laplace. Simbólicamente lo representaremos así

$$\mathcal{L}^{-1}\{V(s)\} = v(t)\,u(t) \tag{1.48}$$

Obsérvese en la expresión (1.48) que la función que recuperamos como resultado de efectuar la transformada inversa de Laplace, $\mathcal{L}^{-1}$, aparece multiplicada por la función escalón y, por tanto, es nula para $t<0$. Esto viene impuesto por el hecho de que en la transformada directa el límite inferior de integración era precisamente $t=0^-$.

La tabla de la figura 1.24 puede usarse en ambas direcciones y, por tanto, permite determinar algunas transformadas inversas en casos sencillos. Así por ejemplo, la transformada inversa de $V(s)=20/s+3$ será:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{20}{s+3}\right\} = 20e^{-3t}u(t) \tag{1.49}$$

La determinación de transformadas inversas de Laplace en aquellos casos en que no puede hacerse una identificación directa con los casos expuestos en la figura 1.24, se aborda mediante descomposición de dicha transformada en fracciones simples. En efecto, la transformada de Laplace de una función será en el caso más frecuente el cociente de dos polinomios en la variable $s$.

$$\mathcal{L}\{v(t)\} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_1 s^m + a_2 s^{m-1} + \ldots + a_m}{b_1 s^n + b_2 s^{n-1} + \ldots + b_n} \qquad n > m \tag{1.50}$$

Obsérvese que todas las transformadas de la tabla de la figura 1.24 son casos particulares de la expresión general dada en (1.50). Los polinomios $N(s)$ y $D(s)$ pueden expresarse en forma factorizada. Por consiguiente, una forma alternativa de expresar (1.50) es la siguiente

$$\mathcal{L}\{v(t)\} = V(s) = K\frac{(s-z_1)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)\ldots(s-p_n)} \tag{1.51}$$

En esta expresión $z_1$, $z_2 \ldots z_m$ son las raíces del polinomio del numerador y reciben el nombre de «ceros». Por otra parte, $p_1$, $p_2 \ldots p_n$ son las raíces del polinomio del denominador y reciben el nombre de polos. La expresión (1.51) admite finalmente esta otra formulación alternativa

$$V(s) = \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{s-p_2} + \ldots + \frac{K_n}{s-p_n} \tag{1.52}$$

En esta última expresión $K_1$, $K_2 \ldots K_n$ reciben el nombre de residuos. Supuesto conocido el valor de estos residuos es obvio que la transformada inversa de $V(s)$ vendrá dada por la siguiente expresión

$$\mathcal{L}^{-1}\{V(s)\} = v(t) = \left(K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + \ldots + K_n e^{p_n t}\right) u(t) \tag{1.53}$$

El problema, por tanto, queda reducido a saber determinar los residuos en cada uno de los polos de $V(s)$. Dos son los casos que con más frecuencia se presentarán en problemas de análisis de circuitos: Polos reales y polos complejos conjugados. Para el caso de polos reales el valor del residuo viene dado por

$$K_i = V(s)(s-p_i)\Big|_{s=p_i}. \tag{1.54}$$

En el caso de que se trate de determinar el residuo correspondiente a un polo complejo hay que tener en cuenta lo siguiente: Puesto que los coeficientes de los polinomios del numerador y denominador de $V(s)$ son reales, ha de estar presente también el polo complejo conjugado. En otras palabras, los polos

complejos de $V(s)$ aparecen siempre en pares conjugados. Como consecuencia, el desarrollo en fracciones parciales contendrá dos términos con el siguiente formato

$$V(s) = \ldots + \frac{K}{s-\alpha-\beta j} + \frac{K^*}{s-\alpha-j\beta} \tag{1.55}$$

Quiere esto decir que los residuos en los polos complejos conjugados son a su vez complejos conjugados. Su valor se determina en principio exactamente igual que si fueran reales. Por tanto, se puede escribir

$$K = V(s)(s-\alpha-\beta j)\Big|_{s=\alpha+j\beta} = |K|e^{j\theta} \tag{1.56}$$

Utilizando la identidad de Euler y fusionando las transformadas inversas correspondientes a cada uno de los dos polos, se obtiene en el dominio temporal una expresión de la forma

$$v(t) = [\ldots + 2|K|e^{\alpha t}\cos(\beta t+\theta)]u(t) \tag{1.57}$$

Como ejemplo de aplicación considérese el siguiente caso de determinación de la transformada inversa

$$V(s) = 20\,\frac{s+3}{(s+1)(s^2+2s+5)} \tag{1.58}$$

En primer lugar habrá que factorizar el polinomio del denominador para lo cual hay que determinar sus raíces. En este caso son

$$\begin{aligned} s+1=0 &\Rightarrow p_1=-1 \\ s^2+2s+5=0 &\Rightarrow p_{2,3}=-1\pm 2j \end{aligned} \tag{1.59}$$

Por consiguiente (1.58) puede escribirse de nuevo del siguiente modo

$$V(s) = 20\,\frac{s+3}{(s+1)(s^2+2s+5)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+1-2j} + \frac{K_2^*}{s+1+2j} \tag{1.60}$$

El valor de los residuos se evalúa según los resultados (1.54) y (1.56).

$$\begin{aligned} K_1 &= 20\,\frac{s+3}{(s+1-2j)(s+1+2j)}\Bigg|_{s=-1} = 10 \\ K_2 &= 20\,\frac{s+3}{(s+1)(s+1+2j)}\Bigg|_{s=-1+2j} = 5\sqrt{2}\,e^{-j\frac{5\pi}{4}} \end{aligned} \tag{1.61}$$

Finalmente, teniendo en cuenta (1.60) y el valor obtenido para los residuos podemos escribir

$$v(t)=\mathcal{L}^{-1}\{V(s)\}=\left[10e^{-t}+10\sqrt{2}e^{-t}\cos\left(2t-\frac{5\pi}{4}\right)\right]u(t) \qquad (1.62)$$

Una vez que hemos visto cómo determinar la transformada de Laplace de una función, sus propiedades y el proceso inverso de recuperación de la función en el dominio temporal a partir de su transformada, vamos a presentar una primera aplicación de esta transformada que permite simplificar el problema del análisis de circuitos. Frente al procedimiento hasta ahora utilizado, cuya secuencia se muestra en la figura 1.25, existe la alternativa de aplicar la transformada de Laplace al sistema de ecuaciones integrodiferenciales que resulte de aplicar mallas o nodos en el circuito objeto del análisis. Dos son las ventajas que se obtienen. En primer lugar, las operaciones derivación e integración en el dominio temporal se transforman en multiplicación o división por $s$ en el dominio complejo. Por consiguiente, el sistema a resolver en el dominio transformado será algebraico y no diferencial. En segundo lugar, la determinación de las constantes en el proceso de solución de la ecuación diferencial resulta complicada, ya que requiere encontrar el valor de la variable

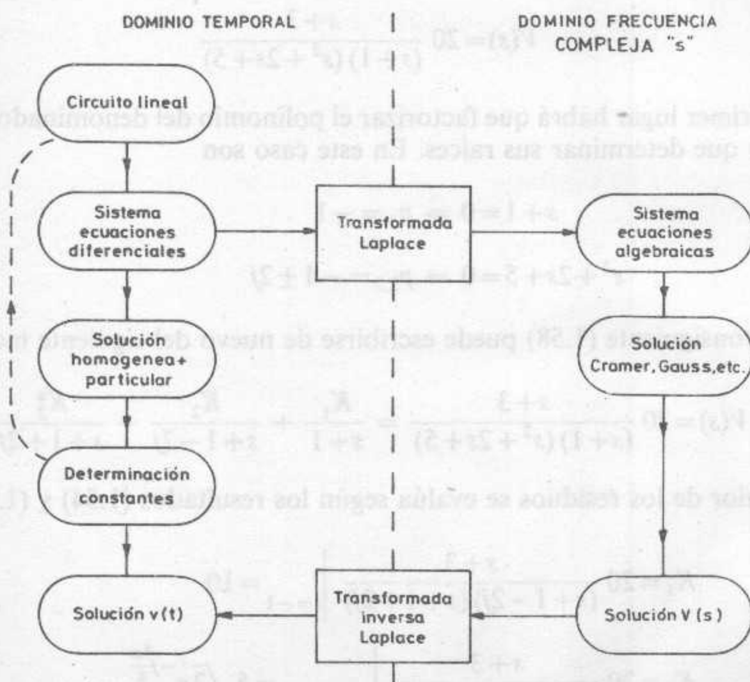



Figura 1.25 Alternativas al proceso de solución.

analizada y de sus derivadas en $t=0$. Por el contrario, en el dominio transformado no existe este problema ya que las condiciones iniciales se incorporan de forma automática al transformar las ecuaciones integro-diferenciales. El procedimiento que acabamos de exponer simplifica, por tanto, el análisis de circuitos ya que el único precio a pagar es la determinación de la transformada inversa una vez se ha obtenido la solución en el dominio complejo.

Como ejemplo de aplicación considérese de nuevo el circuito de la figura 1.18 y que para mayor comodidad reproducimos de nuevo en la figura 1.26.

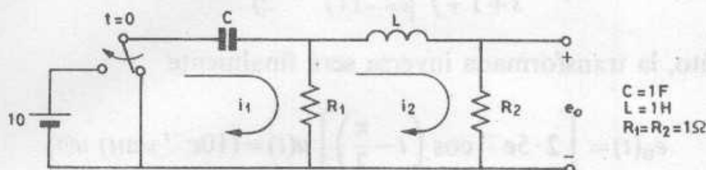



Figura 1.26 Ejemplo de aplicación.

Tal como obtuvimos entonces, las ecuaciones resultantes de aplicar el método de las corrientes de malla son

$$\text{Malla } i_1\text{: } \frac{1}{C}\int_{0^-}^{t} i_1(\tau)d\tau + R_1(i_1 - i_2) = 10\,u(t) \tag{1.63}$$

$$\text{Malla } i_2\text{: } R_1(i_2 - i_1) + L\frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 = 0 \tag{1.64}$$

La aplicación de la transformada de Laplace conduce al siguiente sistema de ecuaciones algebraico

$$\text{Malla } I_1(s)\text{: } \frac{1}{C}\frac{I_1(s)}{s} + R_1\,[I_1(s) - I_2(s)] = \frac{10}{s} \tag{1.65}$$

$$\text{Malla } I_2(s)\text{: } R_1\,[I_2(s) - I_1(s)] + LsI_2(s) + R_2 I_2(s) = 0 \tag{1.66}$$

Este sistema puede escribirse en forma matricial resultando

$$\begin{bmatrix} R_1 + \dfrac{1}{Cs} & -R_1 \\ -R_1 & R_1 + R_2 + Ls \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10/s \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.67}$$

Particularizando para $R_1 = R_2 = 1\ \Omega$, $C=1$ F y $L=1$ H y resolviendo por Cramer se obtiene

$$I_1(s) = \frac{10s+20}{s^2+2s+2} \quad ; \quad I_2(s) = \frac{10}{s^2+2s+2} \tag{1.68}$$

Si estamos interesados en la variable $e_0(t) = R_2 i_2(t)$ habrá que determinar la transformada inversa de $I_2(s)$ para lo cual habremos de desarrollar $I_2(s)$ en fracciones parciales y determinar el valor de los residuos.

$$E_0(s) = \frac{10}{s^2+2s+2} = \frac{10}{(s+1-j)(s+1+j)} = \frac{K_1}{s+1-j} + \frac{K_1^*}{s+1+j} \tag{1.69}$$

$$K_1 = \left.\frac{10}{s+1+j}\right|_{s=-1+j} = \frac{10}{2j} = 5e^{-j\pi/2} \tag{1.70}$$

Por tanto, la transformada inversa será finalmente

$$e_0(t) = \left[2 \cdot 5e^{-t} \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right] u(t) = (10e^{-t} \operatorname{sen} t)\, u(t) \tag{1.71}$$

## 1.11 CIRCUITO TRANSFORMADO DE LAPLACE

Con lo que hasta ahora se ha expuesto cabría pensar que la utilidad de la transformada de Laplace en el análisis de circuitos radica únicamente en que simplifica el proceso de solución de sistemas de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, tal como veremos a continuación, es posible sacar mayor provecho de dicha transformación, hasta el punto de que analizar circuitos generales (con todo tipo de elementos) no requerirá más esfuerzo que el necesario para analizar circuitos resistivos.

La estrategia que se seguirá aparece esquematizada en la figura 1.27. Se trata de aplicar la transformada de Laplace no ya a las ecuaciones diferenciales, como hasta ahora, sino directamente al circuito.

Tal como se vio al principio de este capítulo, el análisis de un circuito se lleva a cabo resolviendo un sistema de ecuaciones integrodiferenciales que proviene por una parte de aplicar en determinados nodos o mallas las leyes de equilibrio (KCL o KVL) y, por otra, de las relaciones *v-i* específicas de los elementos que integren el circuito. Pues bien, este mismo sistema de ecuaciones conducente a la solución, pero ya transformado por Laplace, puede obtenerse siguiendo un proceso idéntico pero esta vez sobre un circuito al que llamamos «transformado» y que se obtiene del circuito en el dominio temporal a partir de las siguientes reglas:

1. El circuito transformado conserva la misma topología (estructura) que el circuito original. Las variables que se definen en él son precisamente las transformadas de Laplace de las tensiones y corrientes asignadas a cada elemento en el dominio temporal, tal como se muestra en la figura 1.28.

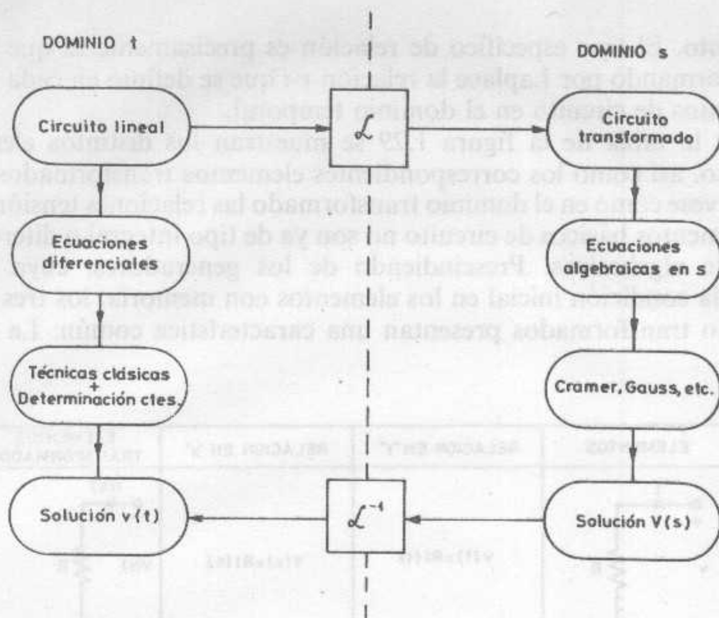



Figura 1.27 Proceso de análisis por métodos transformados.

Una consecuencia inmediata como resultado de conservarse la topología y del carácter lineal de la transformada de Laplace es que, en el dominio «s», se seguirá verificando KCL y KVL. Así por ejemplo, para el circuito transformado de la figura 1.28 se podrán escribir las siguientes ecuaciones

$$\text{KCL: } I_2(s) - I_3(s) - I_4(s) = 0 \tag{1.72}$$

$$\text{KVL: } V_1(s) - V_2(s) - V_3(s) = 0 \tag{1.73}$$

2. Los elementos del circuito transformado establecen una determinada relación entre la tensión $V(s)$ en sus terminales y la corriente $I(s)$ a través del

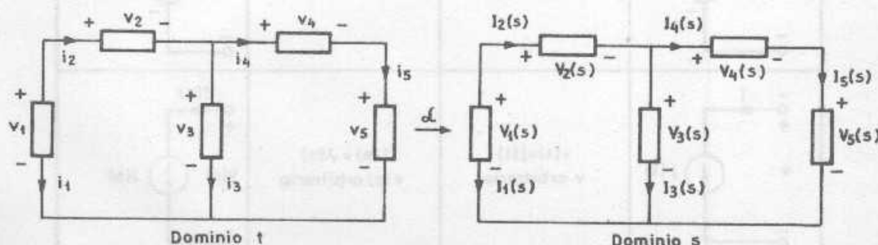



Figura 1.28 Transformación de variables circuitales.

elemento. El tipo específico de relación es precisamente la que se obtiene transformando por Laplace la relación *v-i* que se definió en cada uno de los elementos de circuito en el dominio temporal.

En la tabla de la figura 1.29 se muestran los distintos elementos de circuito, así como los correspondientes elementos transformados.

Obsérvese cómo en el dominio transformado las relaciones tensión-corriente en los elementos básicos de circuito no son ya de tipo integral o diferencial sino puramente algebraicas. Prescindiendo de los generadores, cuya misión es capturar la condición inicial en los elementos con memoria, los tres elementos de circuito transformados presentan una característica común: La tensión se

| ELEMENTOS | RELACION EN "t" | RELACION EN "s" | ELEMENTOS TRANSFORMADOS |
|---|---|---|---|
| i, +, v, −, R | $v(t)=Ri(t)$ | $V(s)=RI(s)$ | I(s), +, V(s), −, R |
| i, +, v, −, L | $v(t)=L\frac{di}{dt}$ | $V(s)=LsI(s)-Li_L(0^-)$ | I(s), +, V(s), −, Ls, $Li_L(0^-)$ |
| i, +, v, −, C | $v(t)=\frac{1}{C}\int_{0^-}^{t} i(\tau)d\tau+v_C(0^-)$ | $V(s)=\frac{1}{Cs}I(S)+\frac{v_C(0^-)}{s}$ | I(s), +, V(s), −, 1/Cs, $\frac{V_C(0^-)}{s}$ |
| i, +, v, −, e(t) | $v(t)=e(t)$<br>i arbitraria | $V(s)=E(s)$<br>I(s) arbitraria | I(s), +, V(s), −, E(s) |
| i, +, v, −, j(t) | $i(t)=j(t)$<br>v arbitraria | $I(s)=J(s)$<br>v(s) arbitraria | I(s), +, V(s), −, J(s) |

Figura 1.29 Tabla de elementos transformados.

obtiene simplemente multiplicando la corriente a través del mismo por un parámetro que llamaremos impedancia y que no es sino la extensión al dominio transformado de Laplace del concepto de resistencia.

La impedancia $Z$ para los distintos elementos se define, por tanto, así

$$V(s) = Z(s)I(s) \tag{1.74}$$

Particularizando (1.74) para los distintos elementos se obtiene en cada caso las siguientes impedancias

$$\begin{aligned} &\text{Resistor} &&: V(s) = R\,I(s) &&: \text{Impedancia} \quad Z_R = R \\ &\text{Inductor} &&: V(s) = Ls\,I(s) &&: \text{Impedancia} \quad Z_L = Ls \\ &\text{Condensador} &&: V(s) = \frac{1}{Cs} I(s) &&: \text{Impedancia} \quad Z_C = 1/Cs \end{aligned} \tag{1.75}$$

Así como el concepto de impedancia de un elemento de circuito surge como paralelismo con la relación tensión-corriente en un resistor, se puede definir también el concepto de admitancia $Y(s)$ de un elemento transformado como la relación entre la corriente y la tensión de acuerdo con la expresión

$$I(s) = Y(s)\,V(s) \tag{1.76}$$

Particularizando (1.76) para los distintos elementos, se obtiene en cada caso las siguientes admitancias

$$\begin{aligned} &\text{Resistor} &&: I(s) = \frac{1}{R} V(s) = GV(s) &&: \text{Admitancia} \quad Y_R = 1/R = G \\ &\text{Inductor} &&: I(s) = \frac{1}{Ls} V(s) &&: \text{Admitancia} \quad Y_L = 1/Ls \\ &\text{Condensador} &&: I(s) = Cs\,V(s) &&: \text{Admitancia} \quad Y_C = Cs \end{aligned} \tag{1.77}$$

Volviendo de nuevo al problema que nos ocupa en este apartado, la estrategia de análisis de circuitos utilizando técnicas transformadas se inicia construyendo el circuito transformado, para lo cual basta aplicar las reglas 1 y 2 expuestas en este apartado y conocer las condiciones iniciales en inductores y condensadores. Una vez se dispone del circuito transformado, puede aplicarse cualquier procedimiento de análisis sistemático (mallas o nodos) con la enorme ventaja de que, al estar definido cada elemento transformado por una impedancia o admitancia, es muy sencillo escribir las ecuaciones KVL o KCL por simple inspección del circuito, como se demostrará en el capítulo 2. Asimismo, siguen siendo válidas todas las técnicas de simplificación de circuitos resistivos (asociación serie, paralelo, transformaciones Thevenin-Norton, movilidad, superposición, etc.) manejando en este caso impedancias y admitancias en lugar de resistencias y conductancias. Obviamente, como

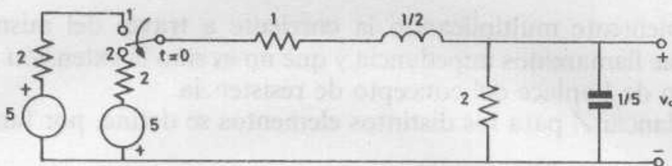



Figura 1.30 Ejemplo de aplicación.

resultado del análisis del circuito transformado se obtendrá la variable deseada también en el dominio «*s*», siendo preciso obtener la transformada inversa de Laplace para conocer la respuesta en el dominio temporal. Como ejemplo de aplicación de análisis de circuitos en el dominio transformado se procederá a determinar $v_0(t)$ en el circuito de la figura 1.30.

1. *Determinación de condiciones iniciales:* Dado que la excitación es constante y que el conmutador ha estado en la posición 1 durante mucho tiempo, todas las tensiones y corrientes serán constantes y, por tanto, el modelo equivalente para $t<0$ será el de la figura 1.31. Un simple análisis permite determinar los valores de $v_C(0^-)$ e $i_L(0^-)$.

$$v_C(0^-)=5\,\frac{2}{2+1+2}=2\text{ V} \tag{1.78}$$

$$i_L(0^-)=\frac{5}{2+1+2}=1\text{ A}$$

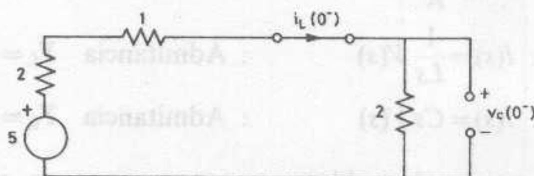



Figura 1.31 Modelo para $t=0^-$.

2. *Construcción del circuito transformado:* Basta sustituir cada elemento por su transformado teniendo en cuenta que los elementos dinámicos incorporan un generador con la condición inicial. Para el circuito de la figura 1.30, el correspondiente transformado para $t\geqslant 0$ se muestra en la figura 1.32.
3. *Análisis:* En este caso, es el método de las corrientes de malla el más idóneo dada la estructura enventanada y la presencia exclusiva de generadores de tensión. El sistema de ecuaciones resultante de aplicar KVL en cada una de las mallas es el siguiente

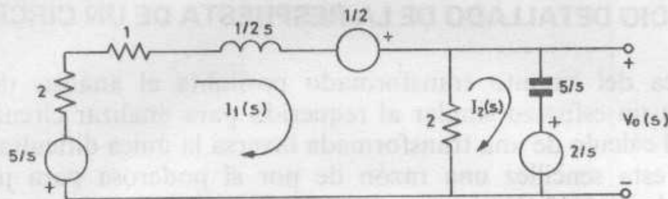



Figura 1.32 Modelo transformado.

$$\begin{bmatrix} 5+\frac{1}{2}s & -2 \\ -2 & 2+\frac{5}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{s}+\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{s} \end{bmatrix} \tag{1.79}$$

Puesto que estamos interesados en la tensión $V_0(s)$ habrá que despejar en (1.79) $I_2(s)$ ya que por inspección del circuito de la figura 1.32 puede escribirse la ecuación

$$V_0(s)=\frac{5}{s}I_2(s)+\frac{2}{s} \tag{1.80}$$

Despejando $I_2(s)$ en (1.79) e incorporando el resultado en (1.80) se obtiene finalmente

$$V_0(s)=\frac{2s^2+17s-50}{s\left(s^2+\frac{17}{2}s+25\right)} \tag{1.81}$$

4. *Obtención de la transformada inversa:*

$$V_0(s)=\frac{2s^2+17s-50}{s\left(s^2+\frac{17}{2}s+25\right)}=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{s+4{,}25-j2{,}63}+\frac{K_2^*}{s+4{,}25+j2{,}63}$$

$$K_1=\left.\frac{2s^2+17s-50}{s^2+\frac{17}{2}s+25}\right|_{s=0}=-2 \tag{1.82}$$

$$K_2=\left.\frac{2s^2+17s-50}{s(s+4{,}25+j2{,}63)}\right|_{s=-4{,}25+j2{,}63}=3{,}8\ \underline{/-58^\circ}$$

Resulta, por tanto, la siguiente expresión para la tensión $v_0(t)$

$$v_0(t)=\left[-2+7{,}6\,e^{-4{,}25t}\cos(2{,}63t-58^\circ)\right]u(t)$$

$$v_0(t)=2 \quad ; \quad t<0$$

## 1.12 ESTUDIO DETALLADO DE LA RESPUESTA DE UN CIRCUITO

La técnica del circuito transformado posibilita el análisis de circuitos generales con un esfuerzo similar al requerido para analizar circuitos resistivos, siendo el cálculo de una transformada inversa la única dificultad añadida. Aun siendo esta sencillez una razón de por sí poderosa para justificar la presencia de los métodos transformados en el análisis, vamos a ver en éste y sucesivos apartados que la descripción de circuitos en el dominio de la frecuencia compleja «*s*» es una fuente de información apasionante relativa a cómo se va a comportar el circuito y todo esto sin siquiera tener que obtener la transformada inversa que nos devolvería al dominio temporal la variable o variables analizadas.

Comenzaremos estudiando el origen de las distintas funciones (exponenciales, senoides amortiguadas...) que aparecen al analizar circuitos. Tal como se muestra en la figura 1.33, al transformar un circuito aparecen, aparte del generador correspondiente a la excitación, una serie de generadores independientes que corresponden a las condiciones iniciales en inductores y condensadores.

Puesto que pretendemos estudiar el origen de los distintos términos que configuran la respuesta, una vía adecuada nos la proporciona el principio de superposición que rige en todos los sistemas lineales y que permite evaluar una respuesta sumando las contribuciones a ella de cada una de las excitaciones, estando las restantes en cada caso desactivadas. Así pues, estudiaremos cómo contribuyen a la respuesta de un circuito por una parte el generador de la excitación y por otra los generadores de condiciones iniciales.

Basándonos en lo anterior definimos en un circuito la respuesta en estado cero y la respuesta a condiciones iniciales. La suma de ambas será la respuesta completa de un circuito con ciertas condiciones iniciales al cual se aplica una excitación.

Entendemos por respuesta en estado cero de un circuito la que se obtiene al aplicar en un cierto instante una excitación, suponiendo que las condiciones iniciales (tensiones en condensadores y corrientes en inductores) son nulas. En esta situación, las ecuaciones de malla del circuito adoptarán la siguiente forma genérica

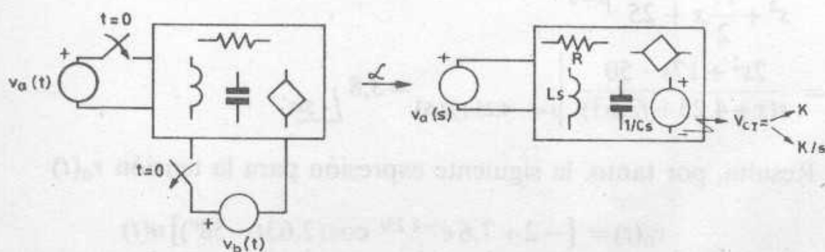



Figura 1.33 Circuito transformado genérico.

$$\begin{bmatrix} Z_{11}(s) & Z_{12}(s) & \dots & Z_{1m}(s) \\ Z_{21}(s) & Z_{22}(s) & \dots & Z_{2m}(s) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Z_{m1}(s) & Z_{m2}(s) & \dots & Z_{mm}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ \\ I_m(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_a(s) \\ 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.83)$$

En la ecuación matricial (1.83) los elementos $Z_{ij}(s)$ son polinomios en la variable «$s$» de la forma $Z_{ij}(s) = \pm\Sigma(\alpha_i s + 1/\beta_i s + \gamma_i)$ siendo $\alpha_i$, $\beta_i$ y $\gamma_i$ parámetros que dependen de los valores de los inductores, condensadores, resistores y características de los distintos tipos de fuentes controladas. Al ser las corrientes de malla variables generadoras, cualquier otra variable circuital podrá expresarse fácilmente en función de ellas y de las impedancias de los elementos. Por consiguiente, para conocer la forma de cualquier respuesta en estado cero (Zero-State) bastará analizar la forma de una cualquiera de las corrientes de malla, lo que puede hacerse resolviendo por Cramer en (1.83) una cualquiera de las corrientes de malla. Se obtiene de este modo una expresión del tipo

$$I_K(s) \Big|_{Z\cdot s} = \frac{\Delta_{1K}(s)}{\Delta(s)} V_a(s) \quad (1.84)$$

Donde $\Delta(s)$ es el determinante del sistema matricial (1.83) y $\Delta_{1K}(s)$ corresponde al adjunto apropiado para obtener la corriente de malla $k$-ésima. En cualquier caso $\Delta_{1K}$ y $\Delta$ serán polinomios racionales en la variable «$s$» dado que todos los elementos de la matriz en donde se evalúan dichos determinantes son también polinomios racionales en «$s$».

Al cociente entre la transformada de Laplace de una respuesta genérica $I_K(s)$ en un circuito, cuando las condiciones iniciales son nulas, y la transformada de Laplace $V_a(s)$ de la excitación lo denominaremos función de red y se representa por $H(s)$. De acuerdo con esta definición y teniendo en cuenta (1.84) se obtiene

$$I_K(s) \Big|_{Z\cdot s} = \frac{\Delta_{1K}}{\Delta} V_a(s) = H(s)\, V_a(s) \quad (1.85)$$

$$H(s) = \frac{\Delta_{1K}}{\Delta} = \frac{I_K(s)}{V_a(s)} \Big|_{CI=0} \quad (1.86)$$

Las expresiones (1.85) y (1.86) nos muestran que cuando las condiciones iniciales son nulas, la respuesta se obtiene multiplicando la transformada de Laplace de la excitación por la función de red del circuito. Así pues, toda la información relativa a la topología del circuito, tipo y valores de los elementos queda condensada en este cociente de polinomios racionales en «$s$», que representamos por $H(s)$ tal como sugiere la figura 1.34.

La función de red $H(s)$ admite otras formas de presentación que serán de interés. Así por ejemplo, si se factorizan los polinomios del numerador y denominador de una $H(s)$ se obtendrá lo siguiente

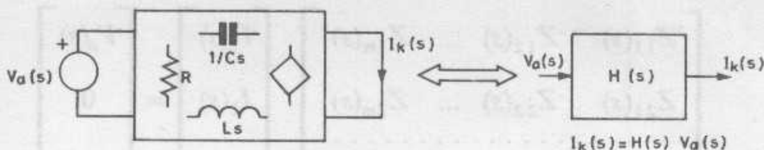



Figura 1.34 Relación Entrada-Salida.

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_0 s^m + ... + a_m}{b_0 s^n + ... + b_n} = K \frac{(s-z_1)...(s-z_m)}{(s-p_1)...(s-p_n)} \qquad (1.87)$$

En esta expresión $z_1 ... z_m$ son las raíces del polinomio del numerador de $H(s)$, reciben el nombre de «ceros» de la función de red y pueden ser reales o complejos. En cuanto a $p_1 ... p_n$ son las raíces del denominador de $H(s)$, reciben el nombre de polos y pueden ser reales o complejos. La constante $K$ coincide con el cociente $a_0/b_0$.

Así pues, una función de red queda completamente especificada cuando se conoce la ubicación en el plano complejo de sus polos y ceros y el valor de la constante $K$.

Así por ejemplo, si representamos los ceros por un círculo (o) y los polos por un aspa (x) el diagrama polos-ceros de la figura 1.35 corresponderá a la siguiente función de red

$$H(s) = K \frac{(s-3)(s+5)}{(s+1-j)(s+1+j)} = K \frac{s^2+2s-15}{s^2+2s+2} \qquad (1.88)$$

Retomando las expresiones (1.85), (1.86) y (1.87) estamos ahora en condiciones de determinar cuál será la forma de la respuesta de un circuito a una

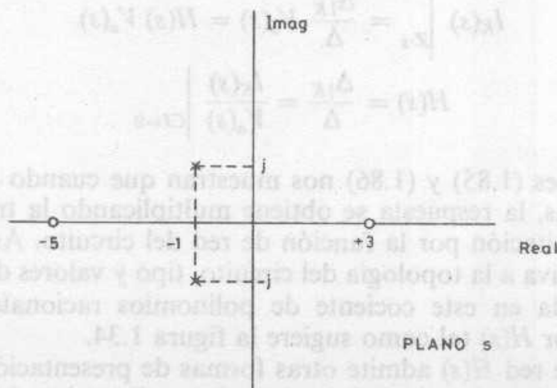



Figura 1.35 Diagrama polos-ceros.

excitación, supuestas nulas las condiciones iniciales. Para ello desarrollaremos en fracciones parciales la expresión (1.84) resultando

$$I_K(s)\Big|_{Z\cdot s} = H(s)\,V_a(s) = \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{s-p_2} + \ldots + \frac{K_n}{s-p_n} + $$

$$+ \frac{\lambda_1}{s-\alpha_1} + \ldots + \frac{\lambda_k}{s-\alpha_k} \qquad (1.89)$$

donde $p_1, p_2 \ldots p_n$ son los polos de la función de red $H(s)$; $\alpha_1 \ldots \alpha_k$ son los polos de la transformada de Laplace de la excitación $V_a(s)$, $K_1 \ldots K_n$ son los residuos en los polos de $H(s)$ y $\lambda_1 \ldots \lambda_k$ los residuos en los polos de la excitación. Tomando ahora la transformada inversa de (1.89) se obtiene finalmente

$$i_k(t)\Big|_{Z\cdot s} = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\,V_a(s)\} =$$

$$= \left(K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + \ldots + K_n e^{p_n t} + \lambda_1 e^{\alpha_1 t} + \ldots + \lambda_k e^{\alpha_k t}\right) u(t) \qquad (1.90)$$

En la respuesta a estado cero se pueden establecer dos grupos con los términos que la componen. El primer grupo lo forman los términos $K_1 e^{p_1 t} \ldots K_n e^{p_n t}$, que provienen del desarrollo en fracciones parciales correspondiente a los polos de la función de red. A este conjunto de términos se le denomina respuesta libre del circuito y su forma depende únicamente de la ubicación de los polos de $H(s)$ en el plano complejo. Sea cual sea la excitación del circuito la respuesta libre existirá, pudiendo únicamente variar las amplitudes $K_1 \ldots K_n$ de los distintos términos que la integran. El segundo grupo de términos coincide con $\lambda_1 e^{\alpha_1 t} + \ldots + \lambda_k e^{\alpha_k t}$ y proviene de obtener la transformada inversa correspondiente a las fracciones parciales de los polos de la excitación $V_a(s)$. A este conjunto de términos se le denomina respuesta forzada. Puede comprobarse que para las excitaciones más frecuentes, tales como escalones, rampas, exponenciales, senoides y que se caracterizan por tener un número finito de derivadas linealmente independientes, los términos de la respuesta forzada tienen formas [salvo coincidencias de polos de $H(s)$ y $V_a(s)$] idénticas a la de la excitación y sus derivadas.

Por consiguiente, para conocer la forma de la respuesta de un circuito sin condiciones iniciales basta conocer la forma de la excitación y la ubicacion de los polos de la función de red. En la respuesta habrá términos con la misma forma que la excitación (respuesta forzada) y términos con formas que dependen de donde estén ubicados los polos de la función de red, tal como indica la tabla de la figura 1.36.

En conclusión, una vez se ha determinado la función de red de un circuito y especificado la excitación, se puede conocer cualitativamente cómo será la forma de la respuesta. Como ejemplo de aplicación considérese el circuito de la figura 1.37.

Un simple análisis permite, suponiendo condiciones iniciales nulas, determinar $V_0(s)$ en función de $I(s)$ para así obtener la función de red

| UBICACION DE LOS POLOS | | TERMINO DE LA RESPUESTA LIBRE | |
|---|---|---|---|
| $-p$ | $\frac{k}{s+p}$ | | $ke^{-pt}$ |
| | $\frac{k}{s-p}$ | | $ke^{pt}$ |
| | $\frac{k}{s}$ | | $k$ |
| $j\beta$, $-\alpha$, $j\beta$ | $\frac{k}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$ | | $ke^{-\alpha t}\cos(\beta t+\theta)$ |
| $j\beta$, $-j\beta$ | $\frac{k}{s^2+\beta^2}$ | | $k\ \text{sen}\,\beta t$ |
| $j\beta$, $\alpha$, $-j\beta$ | $\frac{k}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$ | | $ke^{\alpha t}\cos(\beta t+\theta)$ |

Figura 1.36 Tipos de respuesta libre.

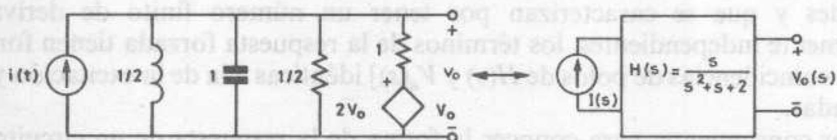



Figura 1.37 Ejemplo de aplicación.

$$\frac{V_0}{I(s)} = H(s) = \frac{s}{s^2+s+2} = \frac{s}{\left(s+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}j\right)\left(s+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}j\right)} \tag{1.91}$$

Factorizando el polinomio del denominador de $H(s)$ se obtiene de (1.91) el diagrama polo-cero de la figura 1.38.

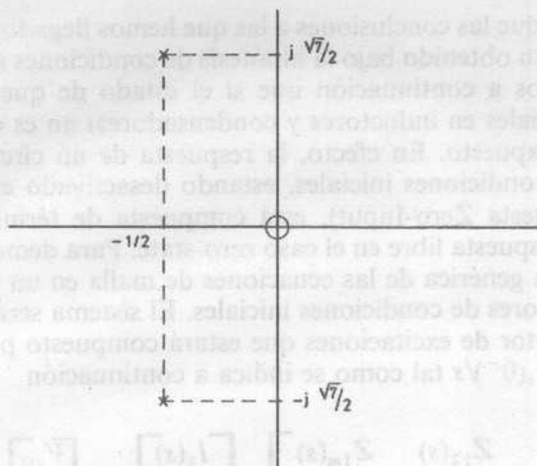



Figura 1.38 Diagrama polo-cero del circuito de la figúra 1.37.

Con toda esta información ya es posible conocer cuál será la forma de la respuesta a una excitación específica en el circuito que nos ocupa. Dicha respuesta constará de los términos de la libre que vienen fijados por la ubicación de los polos de $H(s)$ y de los términos de la forzada que tendrán la misma forma que la excitación y/o sus derivadas. La tabla de la figura 1.39 muestra la forma de la respuesta del circuito estudiado para distintos tipos de excitación.

| EXCITACION | FORMA DE LA RESPUESTA |
|---|---|
| $i(t) = I_0\, u(t)$ | $v_0(t) = \underbrace{\left[k\, e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\, t + \theta\right)\right]}_{\text{Libre}} u(t)$ |
| $i(t) = I_0\, e^{-t/3} u(t)$ | $v_0(t) = \left[\underbrace{k_1 e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\, t + \theta\right)}_{\text{Libre}} + \underbrace{k_2\, e^{-t/3}}_{\text{Forzada}}\right] u(t)$ |
| $i(t) = I_0 \operatorname{sen} 10\, t\; u(t)$ | $v_0(t) = \left[\underbrace{k_1 e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\, t + \theta\right)}_{\text{Libre}} + \underbrace{k_2 \operatorname{sen}(10t + \alpha)}_{\text{Forzada}}\right] u(t)$ |
| $i(t) = I_0\, t\; u(t)$ | $v_0(t) = \left[\underbrace{k_1 e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\, t + \theta\right)}_{\text{Libre}} + \underbrace{k_2}_{\text{Forzada}}\right] u(t)$ |

Figura 1.39 Formas de respuesta según el tipo de excitación para el circuito de la figura 1.37.

Recordemos que las conclusiones a las que hemos llegado sobre la forma de la respuesta se han obtenido bajo la hipótesis de condiciones iniciales nulas. Sin embargo, veremos a continuación que si el estado de que parte el circuito (condiciones iniciales en inductores y condensadores) no es cero, sigue siendo válido todo lo expuesto. En efecto, la respuesta de un circuito debida a los generadores de condiciones iniciales, estando desactivado el generador de la excitación (respuesta Zero-Input), está compuesta de términos con idéntica forma a los de respuesta libre en el caso zero-state. Para demostrarlo basta con estudiar la forma genérica de las ecuaciones de malla en un circuito en el que sólo hay generadores de condiciones iniciales. El sistema será idéntico a (1.83) excepto en el vector de excitaciones que estará compuesto por términos de la forma $Li(0^-)$ o $v_c(0^-)/s$ tal como se indica a continuación

$$\begin{bmatrix} Z_{11}(s) & Z_{12}(s) & Z_{1m}(s) \\ Z_{21}(s) & Z_{22}(s) & Z_{2m}(s) \\ Z_{m1}(s) & Z_{m2}(s) & Z_{mm}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_m(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{ci1} \\ V_{ci2} \\ V_{cim} \end{bmatrix} \tag{1.92}$$

Resolviendo por Cramer (1.92) se obtiene para $I_k(s)$ lo siguiente

$$I_k(s)\Big|_{Z \cdot i} = \frac{\Delta_{1k}}{\Delta} V_{ci1} + \frac{\Delta_{2k}}{\Delta} V_{ci2} + \ldots + \frac{\Delta_{mk}}{\Delta} V_{cim} \tag{1.93}$$

Obsérvese que en cada uno de los sumandos que componen (1.93) el denominador sigue siendo el determinante de la matriz de impedancias de malla, idéntico, por tanto, al que se utiliza para calcular $I_k(s)$ zero-state, de manera que al obtener la transformada inversa de (1.93) sólo se generarán términos de la misma forma que los de la respuesta libre obtenida en estado cero.

## 1.13 ESTABILIDAD

En el apartado anterior vimos cómo es posible predecir la forma de la respuesta de un circuito a una excitación sin necesidad de resolver por completo el problema de análisis. En la misma línea, a veces se requiere tan sólo conocer si la respuesta de un circuito a una excitación de amplitud acotada va a permanecer también acotada. Veremos en este apartado que esta propiedad, que se conoce con el nombre de estabilidad, es posible deducirla de la ubicación de los polos de la función de red en el plano complejo.

Tal como avanzábamos en la presentación de este apartado, decimos que un circuito lineal es estable cuando para una excitación de amplitud acotada (ver figura 1.40) la respuesta se mantiene también acotada. En otras palabras

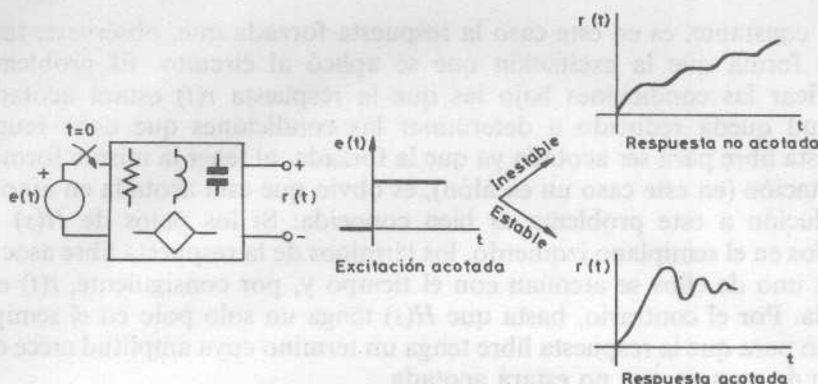



Figura 1.40 Concepto de estabilidad.

$$\text{si} \qquad |e(t)| < C_1 \qquad 0 \leqslant t \leqslant \infty$$

$$\text{entonces} \qquad |r(t)| < C_2 \qquad 0 \leqslant t \leqslant \infty \tag{1.94}$$

donde $C_1$ y $C_2$ son constantes reales positivas.

Se demuestra que la condición necesaria y suficiente para que un circuito sea estable es que todos los polos de la función de red estén ubicados en el semiplano izquierdo. A esta conclusión puede llegarse expresando la respuesta del circuito mediante convolución de la excitación con la respuesta impulsional del mismo. La demostración que efectuaremos aquí, si bien no es completa por cuanto vamos a especificar que la excitación acotada sea una función escalón, permite llegar a las mismas conclusiones y es sumamente ilustrativa sobre los conceptos de respuesta libre y forzada. Se trata, pues, de determinar bajo qué condiciones un circuito excitado con un escalón unitario $u(t)$ proporciona una respuesta acotada en amplitud. Para ello, y suponiendo condiciones iniciales nulas, comenzaremos expresando la respuesta completa de un circuito en el dominio transformado en función de $H(s)$ y de la transformada de Laplace de la excitación

$$R(s) = H(s)\, E(s) \tag{1.95}$$

Si fijamos que la excitación sea un escalón unitario, la respuesta del circuito en el dominio temporal será

$$r(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{H(s)\cdot\frac{1}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K_1}{s-p_1} + \ldots + \frac{K_n}{s-p_n} + \frac{\lambda}{s}\right\} = \tag{1.96}$$
$$= \left(K_1 e^{p_1 t} + \ldots + K_n e^{p_n t} + \lambda\right) u(t)$$

En esta expresión $K_1 e^{p_1 t} + \ldots + K_n e^{p_n t}$ forman la respuesta libre del circuito y

λ, una constante, es en este caso la respuesta forzada que, obsérvese, tiene la misma forma que la excitación que se aplicó al circuito. El problema de especificar las condiciones bajo las que la respuesta $r(t)$ estará acotada en amplitud queda reducido a determinar las condiciones que debe reunir la respuesta libre para ser acotada ya que la forzada, al tener la misma forma que la excitación (en este caso un escalón), es obvio que está acotada en amplitud. La solución a este problema es bien conocida: Si los polos de $H(s)$ están ubicados en el semiplano izquierdo, los términos de la respuesta libre asociados a cada uno de ellos se atenúan con el tiempo y, por consiguiente, $r(t)$ estará acotada. Por el contrario, basta que $H(s)$ tenga un solo polo en el semiplano derecho para que la respuesta libre tenga un término cuya amplitud crece con el tiempo de manera que no estará acotada.

Para ilustrar lo anterior se presenta en la figura 1.41 un diagrama del plano complejo con distintas ubicaciones de polos mostrándose los distintos términos de respuesta libre que generan. Recuérdese que al ser los coeficientes del numerador y denominador de $H(s)$ reales, los polos, si son complejos, han de aparecer por pares conjugados.

La presencia de polos en el eje imaginario plantea problemas de cara a decidir si un circuito es o no estable, por cuanto que la respuesta libre a ellos asociada ni se atenúa ni crece con el tiempo sino que se mantiene siempre acotada. Cabría pensar, por tanto, que tal situación está comprendida en la definición de estabilidad. Sin embargo, basta que un polo de la excitación coincida con un polo de $H(s)$ en el eje imaginario para que se produzca un polo

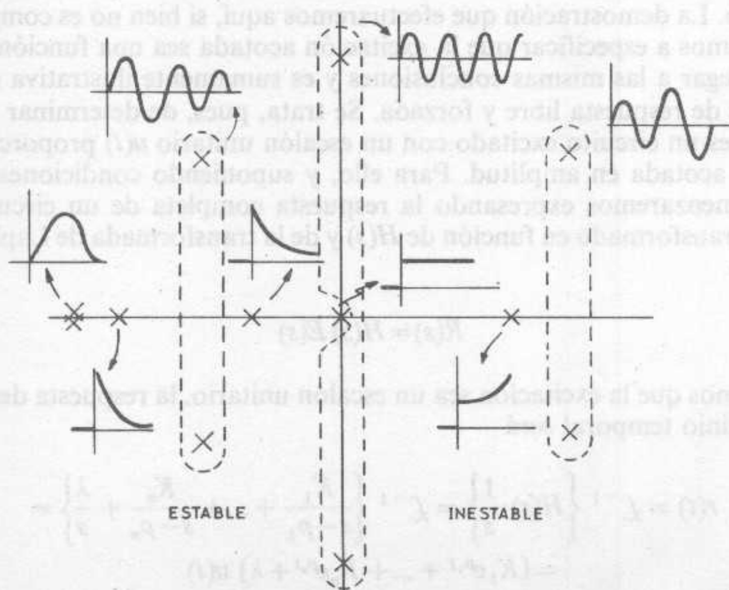



Figura 1.41 Estabilidad a partir de la ubicación de los polos.

doble en el producto $H(s)E(s)$ y, por tanto, la respuesta del circuito tendrá un término que crece linealmente con el tiempo en amplitud y no estará acotada. A los circuitos que tienen polos en el eje imaginario se les denomina marginalmente estables. Dentro de esta categoría cabe destacar los circuitos que tienen un par de polos complejos conjugados en el eje $j\omega$. La respuesta de estos circuitos ante cualquier excitación será una senoide de pulsación igual a la parte imaginaria de los polos y reciben el nombre de osciladores lineales.

Si un circuito es estable también se verifica que su respuesta zero-input se atenúa con el tiempo, ya que la respuesta a entrada cero consta únicamente de términos idénticos en su forma a los de la libre. Una consecuencia de esto es que todos los circuitos pasivos (constituidos por resistores, inductores y condensadores) son estables. En efecto, la respuesta zero-input de un circuito pasivo se atenúa con el tiempo al disiparse en los resistores la energía inicialmente almacenada en inductores y condensadores. Por el contrario, si un circuito tiene fuentes controladas no es posible, a priori, tomar decisiones sobre su estabilidad. Será preciso calcular la función de red y comprobar si alguno de sus polos está en el semiplano derecho, en cuyo caso el circuito será inestable. Si el análisis se realiza manualmente, resulta muy útil el test de Routh-Hurwitz que permite detectar, sin necesidad de factorizar un polinomio, la presencia de raíces en el semiplano derecho. En el caso de análisis por ordenador se suele incorporar una rutina de determinación de raíces de polinomios.

Para ilustrar lo expuesto vamos a determinar la estabilidad del circuito de la figura 1.42 en función de los valores que se asignen a la amplificación $K$ de la fuente controlada.

Un simple análisis permite llegar a la siguiente función de red

$$H(s) = \frac{V_0(s)}{I(s)} = \frac{s}{s^2 + (3-K)\,s + 2} \tag{1.97}$$

Dado que el denominador de $H(s)$ es, en este caso, un polinomio de segundo orden, es sabido que una condición necesaria y suficiente para que todas sus raíces estén en el semiplano izquierdo es que el polinomio sea completo y todos los coeficientes sean del mismo signo. Por consiguiente podemos concluir

$$\begin{array}{ll} \text{Estable} & K<3 \\ \text{Inestable} & K>3 \end{array} \tag{1.98}$$

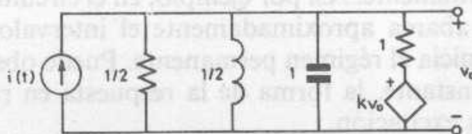



Figura 1.42 Ejemplo para la determinación del margen de estabilidad.

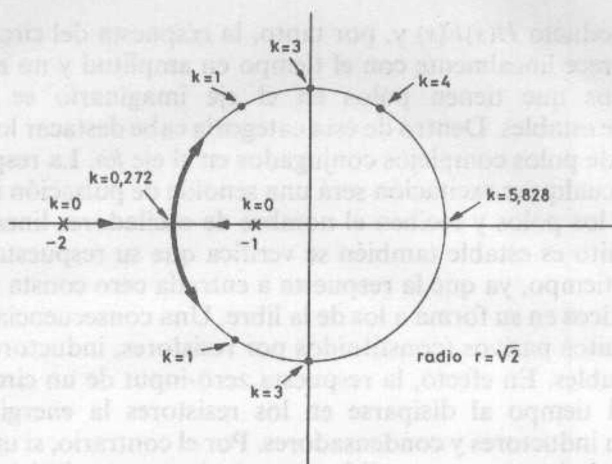



Figura 1.43 Lugar geométrico de los polos para el circuito de la figura 1.42.

En la figura 1.43 se muestra el lugar geométrico de las raíces del polinomio $s^2+(3-K)s+2$ con $K$ como parámetro.

Obsérvese que para $K=3$ las raíces están en el eje imaginario y son $s=\pm j\sqrt{2}$, por lo que para ese valor de $K$ el circuito sería marginalmente estable. Además, en este caso, la respuesta libre sería una senoide de pulsación $\omega=\sqrt{2}$, por lo que el circuito se comportaría como un oscilador lineal.

## 1.14 REGIMEN PERMANENTE SINUSOIDAL

Si un circuito es estable su respuesta libre se atenuará con el tiempo tanto más rápidamente cuanto que la parte real de los polos de la función de red sea más negativa. Por consiguiente, al aplicar una excitación a un circuito estable y transcurrido un cierto intervalo de tiempo, de las dos componentes de la respuesta —libre y forzada— únicamente será preciso considerar esta última. Se pueden, por tanto, establecer dos regímenes de funcionamiento en circuitos estables: régimen transitorio y régimen permanente. El régimen transitorio se extiende desde el instante en que se aplica la excitación hasta que la contribución a la respuesta completa de la libre es despreciable. Es a partir de entonces que la respuesta queda reducida a la forzada y se dice que el circuito opera en régimen permanente. Así por ejemplo, en el circuito de la figura 1.44 el régimen transitorio abarca aproximadamente el intervalo $0 \leqslant t < 40$ s siendo para $t > 40$ s que se inicia el régimen permanente. Puede observarse cómo al ser la excitación una constante, la forma de la respuesta en régimen permanente coincide con la de la excitación.

$$v_0(t)=7(1-e^{-t/10})\,u(t) \qquad (1.99)$$

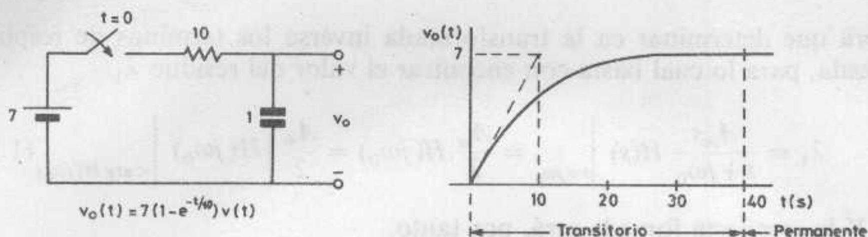



Figura 1.44 Régimen transitorio y permanente.

Existen circuitos que se diseñan ex profeso para operar únicamente en régimen transitorio, tal es el caso, por ejemplo, del circuito de encendido para los motores de explosión. En otros casos se busca precisamente lo contrario: que el circuito alcance lo más rápidamente posible el régimen permanente de manera que la respuesta tenga la misma forma que la excitación. Este sería el caso, por ejemplo, de un amplificador de alta fidelidad.

Un caso de especial relevancia en posteriores aplicaciones es la determinación del régimen permanente en circuitos excitados senoidalmente.

Tal como muestra la figura 1.45 se podrá evaluar la respuesta completa a partir de la siguiente expresión

$$R(s) = H(s)\,E(s) = H(s)\,\frac{A_m s}{s^2+\omega_0^2} \qquad (1.100)$$

Tomando ahora en (1.100) transformada inversa se obtiene

$$r(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{H(s)\,\frac{A_m s}{s^2+\omega_0^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k_1}{s-p_1}+\ldots+\frac{k_n}{s-p_n}+ \right.$$
$$\left. +\frac{\lambda_1}{s-j\omega_1}+\frac{\lambda_1^*}{s+j\omega_2}\right\} \qquad (1.101)$$

En esta expresión $p_1 \ldots p_n$ son los polos de $H(s)$, $k_1 \ldots k_n$ los residuos en los polos de $H(s)$ y $\lambda_1$, $\lambda_1^*$ son los residuos en los polos de la excitación.

Puesto que sólo estamos interesados en el régimen permanente, únicamente

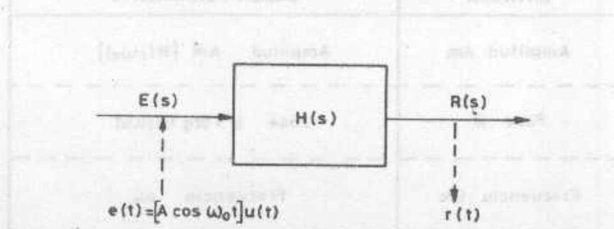



Figura 1.45 Respuesta forzada en régimen permanente senoidal.

habrá que determinar en la transformada inversa los términos de respuesta forzada, para lo cual basta con encontrar el valor del residuo $\lambda_1$

$$\lambda_1 = \frac{A_m s}{s+j\omega_0} H(s) \Big|_{s=j\omega_0} = \frac{A_m}{2} H(j\omega_0) = \frac{A_m}{2} \Big| H(j\omega_0) \Big|_{<\arg H(j\omega_0)} \quad (1.102)$$

Y la respuesta forzada será, por tanto,

$$r(t)p = A_m | H(j\omega_0)| \cos [\omega_0 t + \arg H(j\omega_0)] \quad (1.103)$$

La interpretación de este resultado es la siguiente: Al excitar un circuito estable con una senoide de amplitud $A_m$ y pulsación $\omega_0$ se obtiene, en régimen permanente, otra senoide de la misma pulsación $\omega_0$, una amplitud que corresponde a la de la senoide de entrada multiplicada por el módulo de la función de red evaluada para $s=j\omega_0$ y, finalmente, un desfase con referencia a la entrada de valor igual al argumento de la función de red a esa pulsación, como se indica en la tabla de la figura 1.46.

Como ejemplo de aplicación considérese el circuito de la figura 1.47 en el que se trata de determinar el régimen permanente ante una excitación senoidal de amplitud 10 V y frecuencia 2 rad/s.

En primer lugar determinaremos la función de red

$$H(s) = \frac{V_0(s)}{V_g(s)} = \frac{\frac{1}{s}}{\frac{3}{2} + \frac{s}{2} + \frac{1}{s}} = \frac{2}{s^2+3s+2} \quad (1.104)$$

Particularizando $H(s)$ para $s=2j$ se obtiene

$$H(2j) = \frac{2}{s^2+3s+2} \Big|_{s=2j} = \frac{1}{-1+3j} = \frac{\sqrt{10}}{10} e^{-108^\circ j} \quad (1.105)$$

| ENTRADA | SALIDA PERMANENTE |
|---|---|
| Amplitud Am | Amplitud Am $\lvert H(j\omega_0)\rvert$ |
| Fase Ø | Fase Ø + arg $H(j\omega_0)$ |
| Frecuencia $\omega_0$ | Frecuencia $\omega_0$ |

Figura 1.46 Procesado de señales senoidales.

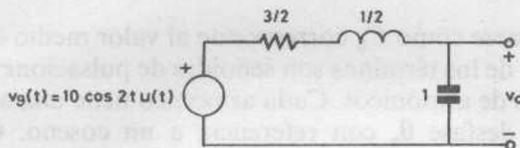



Figura 1.47 Ejemplo determinación R.P.S.

Aplicando ahora los resultados sumarizados en la tabla de la figura 1.46 se obtiene finalmente la siguiente respuesta en régimen permanente

$$v_0(t)p = \frac{\sqrt{10}}{10} \cos (2t - 108^{\circ}) \tag{1.106}$$

## 1.15 ANALISIS FRECUENCIAL. TEORIA DE FOURIER

En el apartado precedente hemos desarrollado un procedimiento para determinar la respuesta en régimen permanente de circuitos excitados senoidalmente. La elección de este tipo concreto de excitación no ha sido casual sino que, como veremos a continuación, conociendo la forma en que los circuitos procesan señales senoidales es sencillo el determinar su comportamiento ante otro tipo de señales, periódicas o no, y además desde el punto de vista frecuencial, que en muchos casos es conceptualmente y de cara al diseño mucho más rico que el enfoque temporal.

Comenzaremos analizando la respuesta de un circuito, caracterizado por su $H(s)$, ante excitaciones periódicas no senoidales. Para estas señales, el desarrollo en serie de Fourier posibilita el aproximarlas por una serie infinita de senoides armónicamente relacionadas. Más concretamente, si la señal $s(t)$ tiene un período de valor $T_0$, podrá aproximarse en virtud del desarrollo en serie de Fourier del siguiente modo

$$s(t) = s(t \pm T_0) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|C_n| \cos (n\omega_0 t + \theta_n)$$

$$\left\{ \begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} s(t)\, dt \\ C_n &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} s(t)\, e^{-jn\omega_0 t} dt \\ \omega_0 &= \frac{2\pi}{T_0} \end{aligned} \right. \tag{1.107}$$

Puede comprobarse cómo $C_0$ corresponde al valor medio de la señal $s(t)$ en un período; el resto de los términos son senoides de pulsaciones múltiplos de $\omega_0$ y reciben el nombre de armónicos. Cada armónico tiene una amplitud de valor $2|C_n|$ y un cierto desfase $\theta_n$ con referencia a un coseno. Generalmente se acostumbran a representar los desarrollos en serie de Fourier mediante diagramas espectrales de amplitud y fase. Son estos diagramas gráficas que muestran la amplitud y fase de los distintos armónicos a cada una de las frecuencias $n\omega_0$ tal como se muestra en la figura 1.48.

Así por ejemplo, para la señal periódica de la figura 1.49 se obtiene, previo cálculo de los coeficientes $C_n$, el desarrollo en serie allí indicado y cuyos espectros de amplitud y fase se muestran en la figura 1.50.

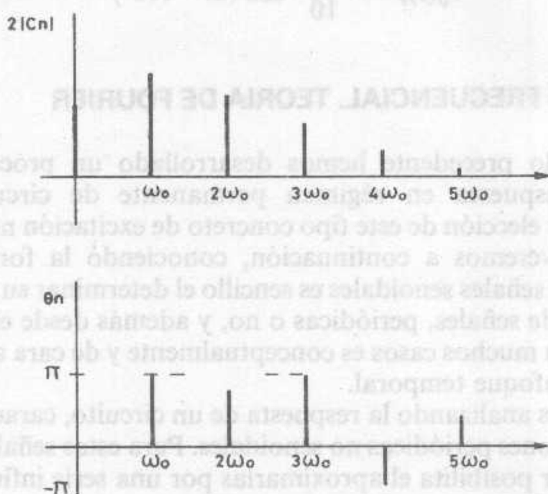



Figura 1.48 Espectros de Fourier.

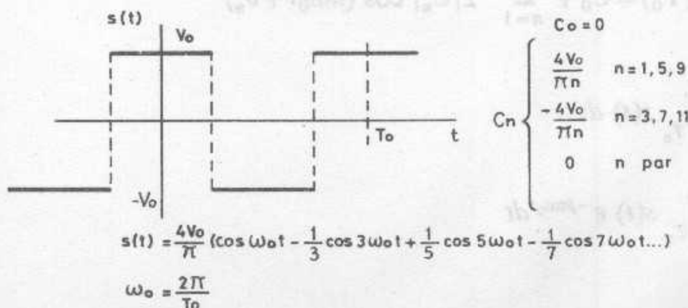



Figura 1.49 Desarrollo de Fourier de una señal cuadrada.

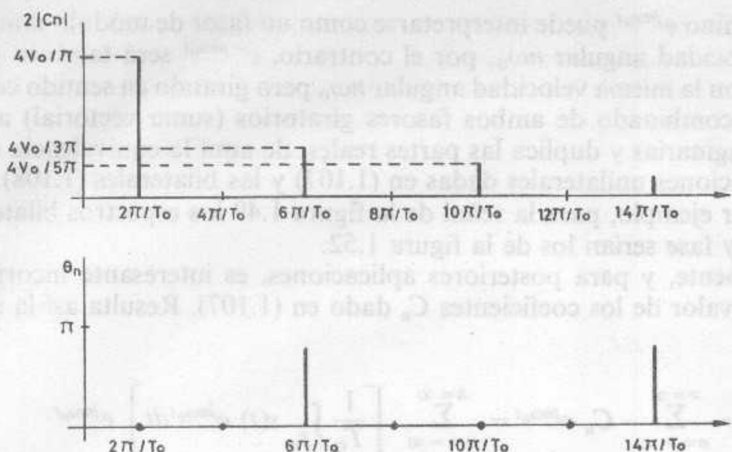



Figura 1.50 Espectros de amplitud y fase de una señal cuadrada.

La expresión dada en (1.107) para el desarrollo en serie de Fourier admite otras formas de presentación. La más versátil es la forma exponencial cuya expresión es la siguiente

$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n\, e^{jn\omega_0 t} \qquad (1.108)$$

En (1.108) los coeficientes $C_n$ tienen idéntico valor al dado en (1.107). Por el contrario, el sumatorio se extiende desde $n=-\infty$ hasta $n=\infty$ y en lugar de senoides aparece la exponencial compleja. La equivalencia entre (1.107) y (1.108) es fácil de demostrar por medio de las identidades de Euler.

Un aspecto interesante de la formulación dada en (1.108) para el desarrollo en serie de Fourier es que conduce a representaciones espectrales bilaterales. Para cada valor de $|n|$ existirá una raya espectral a pulsación $n\omega_0$ y $-n\omega_0$. El significado físico de las pulsaciones negativas puede entenderse con ayuda de la figura 1.51.

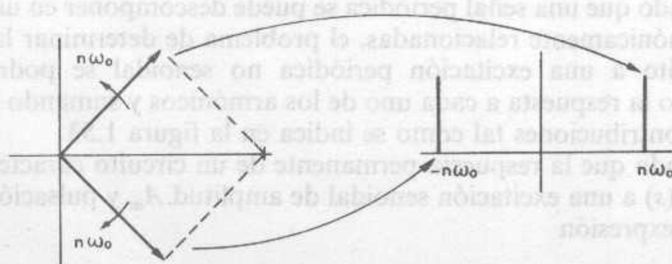



Figura 1.51 Fasores giratorios.

El término $e^{jn\omega_0 t}$ puede interpretarse como un fasor de módulo unitario que gira a velocidad angular $n\omega_0$, por el contrario, $e^{-jn\omega_0 t}$ será también un fasor unitario con la misma velocidad angular $n\omega_0$ pero girando en sentido contrario. El efecto combinado de ambos fasores giratorios (suma vectorial) anula las partes imaginarias y duplica las partes reales, de aquí la equivalencia entre las representaciones unilaterales dadas en (1.107) y las bilaterales (1.108).

Así por ejemplo, para la señal de la figura 1.49 los espectros bilaterales de amplitud y fase serían los de la figura 1.52.

Finalmente, y para posteriores aplicaciones, es interesante incorporar en (1.108) el valor de los coeficientes $C_n$ dado en (1.107). Resulta así la siguiente expresión

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n\, e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \left[ \frac{1}{T_0} \int_{T_0} s(t)\, e^{jn\omega_0 t} dt \right] e^{jn\omega_0 t} \qquad (1.109)$$

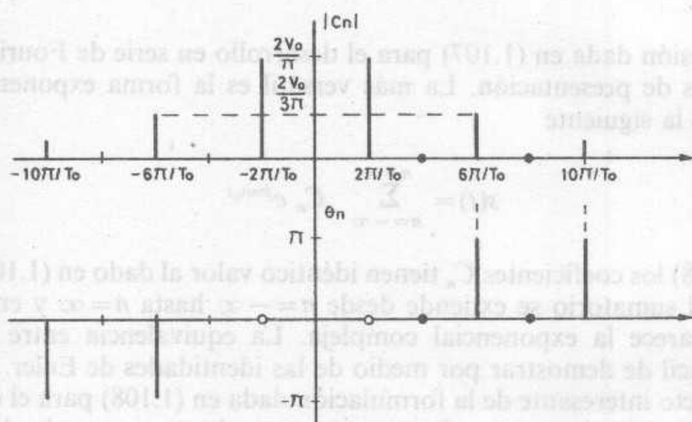


Figura 1.52 Espectro bilateral de una señal cuadrada.

Puesto que sabemos determinar la respuesta de un circuito a una excitación senoidal y dado que una señal periódica se puede descomponer en una suma de senoides armónicamente relacionadas, el problema de determinar la respuesta de un circuito a una excitación periódica no senoidal se podrá abordar determinando la respuesta a cada uno de los armónicos y sumando luego cada una de las contribuciones tal como se indica en la figura 1.53.

Recordando que la respuesta permanente de un circuito caracterizado por una cierta $H(s)$ a una excitación senoidal de amplitud $A_m$ y pulsación $\omega_0$ viene dada por la expresión

$$r(t) = A_m |H(j\omega_0)| \cos[\omega_0 t + \arg H(j\omega_0)] \qquad (1.110)$$

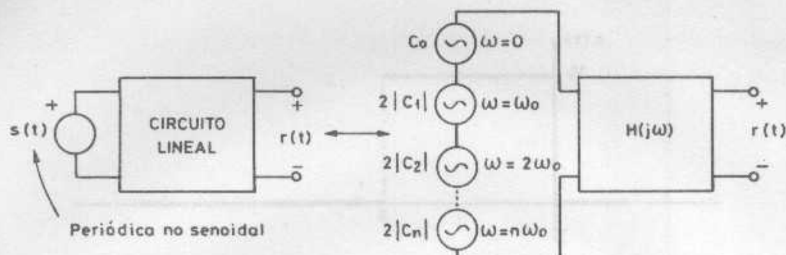



Figura 1.53 Determinación de la respuesta permanente de un circuito a una señal periódica no senoidal.

La respuesta a una excitación periódica no senoidal será, de acuerdo con la figura 1.53, la siguiente

$$r(t)=C_0\,H(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\ 2|C_n|\,|H(jn\omega_0)|\cos\left[n\omega_0 t+\theta_n+\arg H(jn\omega_0)\right] \quad (1.111)$$

En esta expresión $C_0$, $C_1$,..., $C_n$ son los coeficientes (1.107) del desarrollo en serie de Fourier de $s(t)$ cuyo periodo es $T_0=2\pi/\omega_0$. $H(0)$, $H(j\omega_0)$, $H(2j\omega_0)$... es la función de red $H(s)$ del circuito, particularizada para $s=0, j\omega_0, 2j\omega_0$, es decir, a las frecuencias de los armónicos de $s(t)$.

Un estudio, similar al que hemos realizado para señales periódicas, puede desarrollarse para el caso de señales no periódicas. En efecto, una señal no periódica puede considerarse como periódica pero con un período tendiendo a infinito. En este caso, la separación entre rayas espectrales, que viene dada por $\omega_0=2\pi/T$, tenderá a ser cero y, en lugar de ser el espectro discreto, será continuo.

La herramienta matemática que permite obtener el contenido frecuencial de señales no periódicas se denomina transformada de Fourier y viene dada por la siguiente expresión

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\,e^{-j\omega t}\,dt \quad (1.112)$$

El módulo de $F(j\omega)$ es precisamente el espectro de amplitud de la señal $s(t)$ y su argumento el espectro de fase.

Como ejemplo de aplicación considérese el pulso de la figura 1.54 en el que se quieren determinar sus características frecuenciales.

Puesto que se trata de una señal no periódica habrá que evaluar su transformada de Fourier

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\,e^{-j\omega t}\,dt=\int_0^{\tau} V_0\,e^{-j\omega t}dt=\frac{2V_0}{\omega}\ \text{sen}\,\frac{\omega\tau}{2}\,e^{-j\omega\tau/2} \quad (1.113)$$

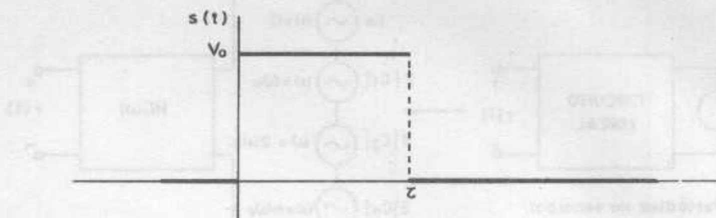



Figura 1.54 Pulso de longitud τ.

Los espectros de amplitud y fase vendrán dados por las siguientes expresiones cuya representación gráfica se muestra en la figura 1.55.

$$|F(j\omega)| = \frac{2V_0}{\omega}\left|\ \text{sen}\,\frac{\omega\tau}{2}\right| = V_0\tau\left|\frac{\text{sen}\,\dfrac{\omega\tau}{2}}{\dfrac{\omega\tau}{2}}\right| \qquad (1.114)$$

$$\arg F(j\omega) = -\frac{\omega\tau}{2} \quad ; \quad |\omega| \leqslant \frac{2\pi}{\gamma}$$

Así como la expresión (1.111) nos proporciona la transformada de Fourier de la señal $s(t)$, puede demostrarse que la transformada inversa que permite

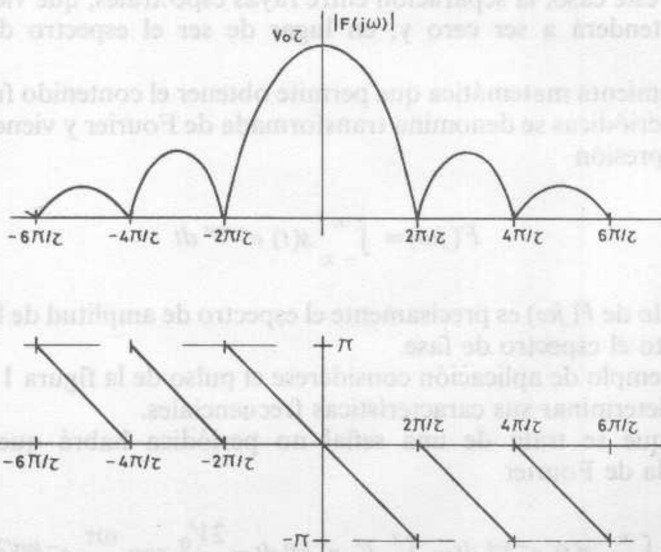



Figura 1.55 Espectros de amplitud y fase del pulso de duración τ.

recuperar la señal $s(t)$, conocida su transformada de Fourier $F(j\omega)$, viene dada por

$$s(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega \tag{1.115}$$

De la comparación de (1.115) con (1.109) se desprende que el papel que desempeñaban los coeficientes $C_n$ en el desarrollo en serie de Fourier de señales periódicas es asumido, en el caso de señales no periódicas, por $(1/2\pi)F(j\omega)d\omega$. Así pues, el módulo de la transformada de Fourier de una señal $s(t)$ representa la intensidad de su contenido frecuencial por unidad de frecuencia angular.

La forma de determinar las características frecuenciales de la respuesta de un circuito a una excitación no periódica es similar a la solución obtenida en (1.111) para el caso de señales periódicas. Allí cada uno de los armónicos de la respuesta se obtenía multiplicando la amplitud del correspondiente armónico de la excitación por el módulo de la función de red evaluado a la frecuencia del armónico. En cuanto a la fase, se sumaba a la fase de cada armónico el argumento de la función de red evaluado a la frecuencia del armónico en cuestión. Para señales no periódicas, al ser los espectros de amplitud y fase continuos en lugar de discretos, los productos que antes efectuábamos únicamente a las frecuencias de los armónicos ahora será preciso realizarlos de forma continua en todo el margen de existencia de las funciones $E(j\omega)$ (transformada de Fourier de la excitación) y $H(j\omega)$ (función de red del circuito con $s=j\omega$), tal como se muestra en la figura 1.56.

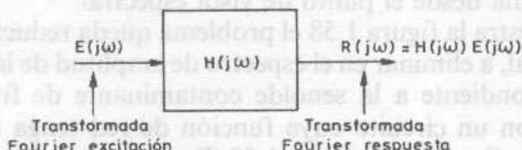



Figura 1.56 Procesado frecuencial.

Así pues, la transformada de Fourier de la respuesta $R(j\omega)$ se expresa en función de la transformada de Fourier de la excitación $E(j\omega)$ y de la función de red del circuito a través de la expresión

$$R(j\omega)=H(j\omega)\,E(j\omega) \tag{1.116}$$

El módulo de $R(j\omega)$ representa el espectro de amplitud de la respuesta y viene dado por

$$|R(j\omega)|=|H(j\omega)|\,|E(j\omega)| \tag{1.117}$$

El espectro de fase, a su vez, será

$$\arg R(j\omega) = \arg H(j\omega) + \arg E(j\omega) \tag{1.118}$$

## 1.16 RESPUESTA FRECUENCIAL

En el apartado anterior hemos desarrollado procedimientos especialmente enfocados a la determinación de las características espectrales de la respuesta de circuitos. Tanto si la excitación es periódica como si no, el espectro de amplitud de la respuesta se obtiene multiplicando el espectro de amplitud de la excitación por el módulo de la función de red evaluado a lo largo del eje $j\omega$. Del mismo modo, el espectro de fase se obtiene sumando al de la excitación el argumento de la función de red. Esta propiedad sugiere un atractivo campo de utilización de los circuitos como procesadores de señales. En efecto, bastará lograr que la curva representativa de $|H(j\omega)|$ tenga una forma adecuada para que determinadas zonas del espectro de la excitación se vean realzadas en la salida y, por el contrario, otras se atenúen.

Para ilustrar la potencialidad de los métodos frecuenciales en la resolución de problemas de diseño considérese el siguiente caso en el que se pretende limpiar una señal senoidal de frecuencia $f_s$ contaminada por otra también senoidal de frecuencia $f_c > f_s$ y que podría corresponder al ruido inducido por la red. Se trata, tal como se indica en la figura 1.57, de diseñar un circuito que realice la función antes descrita.

Las características del circuito que excitado por la señal contaminada $e(t)$ nos proporcione la respuesta limpia $r(t)$ pueden deducirse fácilmente si se plantea el problema desde el punto de vista espectral.

Tal como muestra la figura 1.58 el problema queda reducido, desde el punto de vista frecuencial, a eliminar en el espectro de amplitud de la excitación la raya espectral correspondiente a la senoide contaminante de frecuencia $\omega_c$. Esto puede lograrse con un circuito cuya función de red tenga un módulo con la forma de ranura indicada en la figura 1.58. En efecto, el espectro de la respuesta se obtiene multiplicando el espectro de la excitación por el módulo de la función de red. Para la raya espectral a pulsación $\omega_s$ el módulo de la función de red vale aproximadamente la unidad, por lo que a la salida estará presente, a la

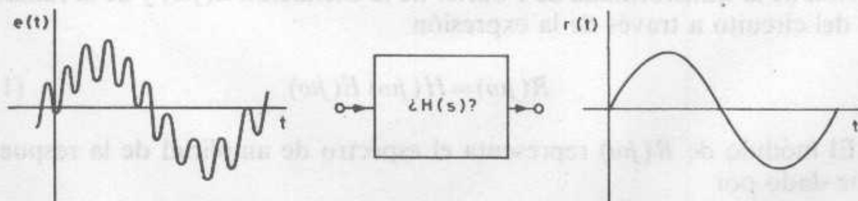



Figura 1.57 Circuito objeto de diseño.

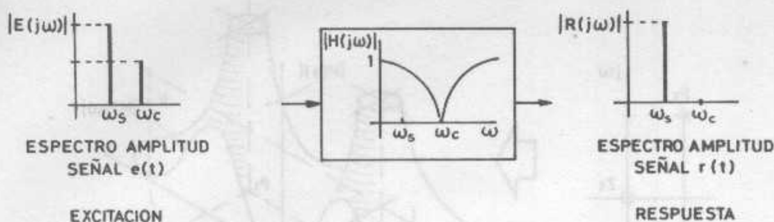



Figura 1.58 Características frecuenciales del procesado a realizar.

pulsación $\omega_s$, una raya espectral con idéntica amplitud que a la entrada. Por el contrario, a la pulsación $\omega_c$, el módulo de la función de red vale cero, por lo que a la salida no estará presente la raya espectral correspondiente a la señal contaminante.

Puede comprobarse que el circuito de la figura 1.59 tiene una función de red cuya curva de representación del módulo en función de la frecuencia realizaría a plena satisfacción la función requerida.

De todo lo anterior se desprende la importancia de conocer las curvas de respuesta en frecuencia de un circuito, esto es, la representación gráfica de las variaciones con la frecuencia del módulo y argumento de la función de red particularizada para $s=j\omega$, que suelen denominarse curvas de amplificación y desfase, respectivamente.

Puede conseguirse una representación cualitativa de la curva de amplificación, interpretando geométricamente la particularización del módulo de $H(s)$ para $s=j\omega$, según se ilustra en la figura 1.60. La superficie representada corresponde a la función $|H(s)|$, por lo que la curva de amplificación se obtendrá, tal como se indica, intersectando esta superficie con el plano $p$, levantado perpendicularmente al plano $s$ sobre el eje $j\omega$.

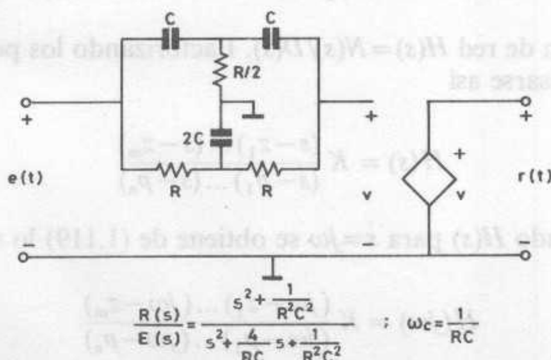



Figura 1.59 Solución al problema de la figura 1.58.

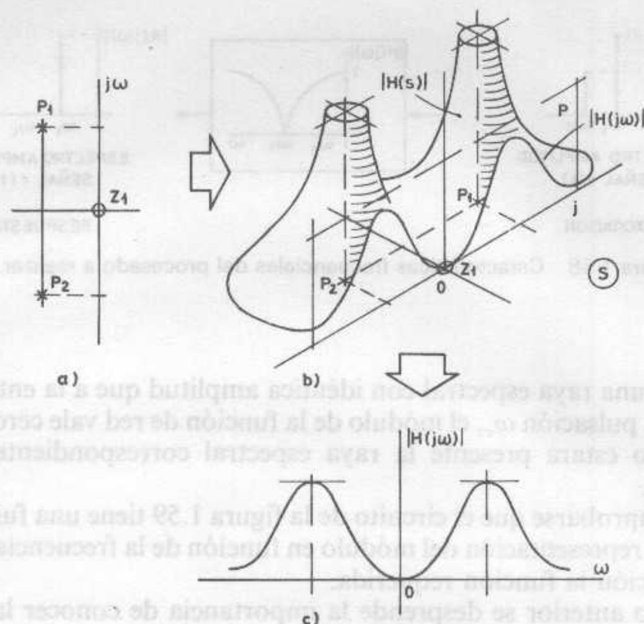



Figura 1.60 Trazado cualitativo de la curva de amplificación.

Esta interpretación es útil porque permite valorar a priori ciertos aspectos notables de la respuesta en frecuencia de un circuito, basándose en el diagrama polos-ceros de su función de red. Como se desprende de la figura, los polos próximos al eje *j* provocarán elevaciones en la amplificación, que serán tanto más acusadas cuanto más cercanos estén al referido eje. Del mismo modo, los ceros, al implicar el contacto de la superficie $|H(s)|$ con el plano *s*, regularán las depresiones de la curva de amplificación.

Desarrollaremos aquí un procedimiento gráfico, a partir del diagrama polos-ceros de una función de red, para la obtención de las curvas de respuesta en frecuencia.

Sea la función de red $H(s)=N(s)/D(s)$. Factorizando los polinomios $N(s)$ y $D(s)$ podrá expresarse así

$$H(s) = K\,\frac{(s-z_1)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)\ldots(s-p_n)} \tag{1.119}$$

Particularizando $H(s)$ para $s=j\omega$ se obtiene de (1.119) lo siguiente

$$H(j\omega) = K\,\frac{(j\omega-z_1)\ldots(j\omega-z_m)}{(j\omega-p_1)\ldots(j\omega-p_n)} \tag{1.120}$$

Cada uno de los factores $(j\omega-z_i)$ o $(j\omega-p_i)$ corresponde, en el plano

Del mismo modo, y a partir de (1.122), el argumento de $H(j\omega)$ vendrá dado por

$$\arg H(j\omega)=\psi_1+\ldots+\psi_m-\theta_1-\ldots-\theta_n \tag{1.124}$$

Quiere esto decir que el argumento de la función de red se obtiene restando de la suma de los argumentos de los vectores con origen en los ceros de $H(s)$ y extremos en el punto genérico del eje imaginario $s=j\omega$ la suma de los argumentos de los vectores con origen en los polos y extremos en el mismo punto $s=j\omega$.

El procedimiento descrito proporcionaría el valor del módulo y argumento de la función de red a una pulsación concreta. El trazado de las curvas $|H(j\omega)|$ arg $H(j\omega)$ puede obtenerse repitiendo el proceso tantas veces como puntos de la gráfica se deseen. Como ejemplo de aplicación de la técnica descrita considérese la siguiente función de red, cuyas curvas de amplitud y fase se pretenden determinar

$$H(s)=\frac{s}{s^2+4s+2}=4\frac{s}{(s+1-j)(s+1+j)} \tag{1.125}$$

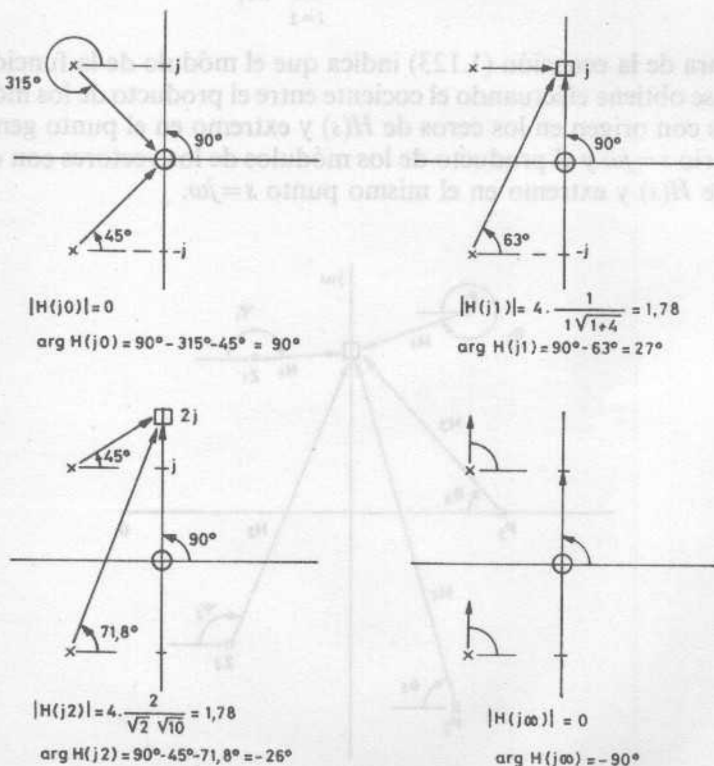



Figura 1.62 Diagramas vectoriales para la determinación del módulo y fase de $H(j\omega)$.

Del mismo modo, y a partir de (1.122), el argumento de $H(j\omega)$ vendrá dado por

$$\arg H(j\omega)=\psi_1+...+\psi_m-\theta_1-...-\theta_n \tag{1.124}$$

Quiere esto decir que el argumento de la función de red se obtiene restando de la suma de los argumentos de los vectores con origen en los ceros de $H(s)$ y extremos en el punto genérico del eje imaginario $s=j\omega$ la suma de los argumentos de los vectores con origen en los polos y extremos en el mismo punto $s=j\omega$.

El procedimiento descrito proporcionaría el valor del módulo y argumento de la función de red a una pulsación concreta. El trazado de las curvas $|H(j\omega)|$ arg $H(j\omega)$ puede obtenerse repitiendo el proceso tantas veces como puntos de la gráfica se deseen. Como ejemplo de aplicación de la técnica descrita considérese la siguiente función de red, cuyas curvas de amplitud y fase se pretenden determinar

$$H(s)=\frac{s}{s^2+4s+2}=4\frac{s}{(s+1-j)(s+1+j)} \tag{1.125}$$

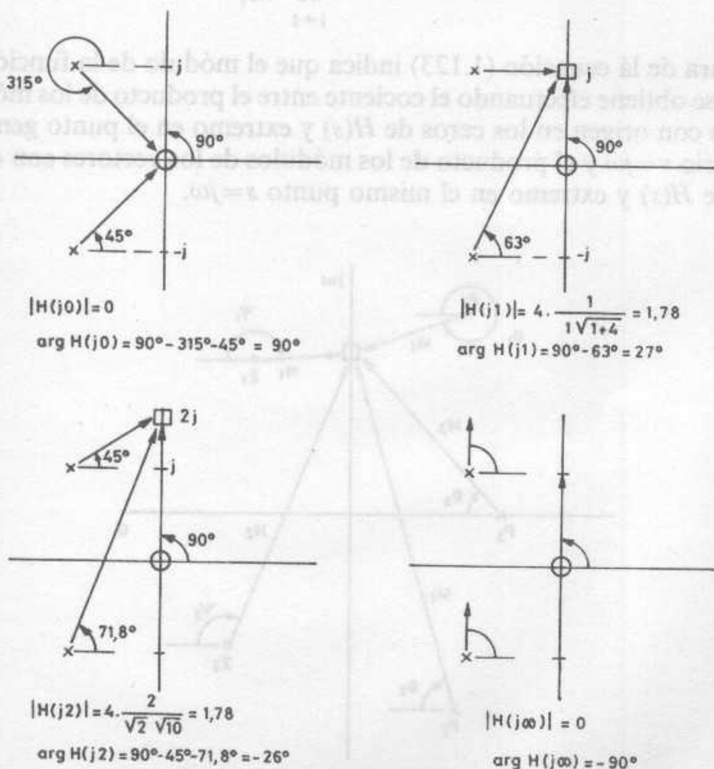



Figura 1.62 Diagramas vectoriales para la determinación del módulo y fase de $H(j\omega)$.

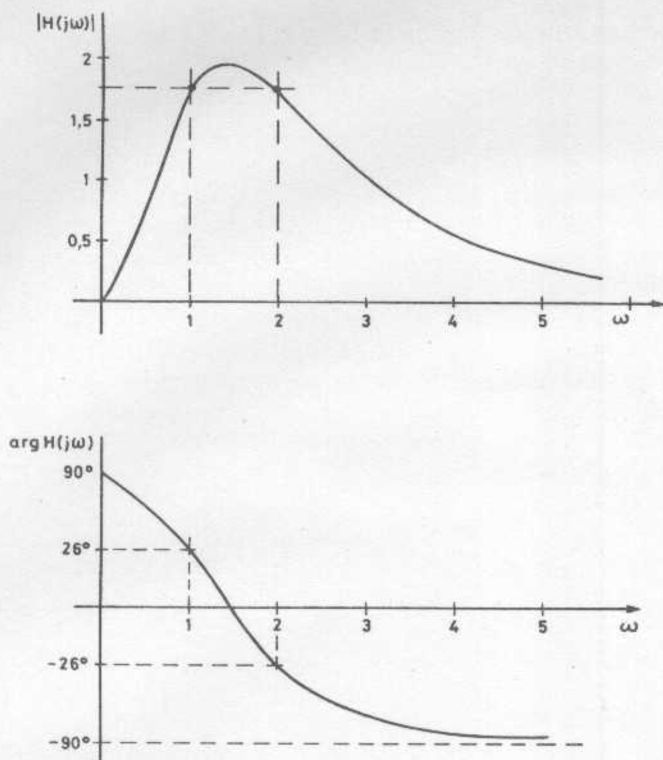



Figura 1.63 Módulo y argumento de $H(j\omega)$.

Puede perfilarse el trazado de las curvas, obteniendo los valores del módulo y argumento para las pulsaciones: $\omega=0$, $\omega=1$, $\omega=2$, $\omega=\infty$. En la figura 1.62 se muestra el procedimiento gráfico seguido para su determinación. Finalmente, en la figura 1.63, se han representado las curvas correspondientes.

# Capítulo 2

# Análisis sistemático de circuitos lineales

## 2.1 INTRODUCCION

En su acepción más general, el análisis de un circuito consiste en determinar la tensión y la corriente en cada una de sus ramas. En consecuencia, para un circuito de $b$ ramas o elementos, el número de variables es $2b$, lo que parece indicar la necesidad de plantear y resolver un sistema de $2b$ ecuaciones linealmente independientes. Siguiendo esta línea, aunque advirtiendo de la existencia de métodos más elaborados que requieren un número menor de ecuaciones, el sistema debe incluir lógicamente las $b$ relaciones constitutivas de los elementos, entre las que no existe ninguna combinación lineal al intervenir en cada una de ellas variables que no aparecen en las demás.

A título de ejemplo, para el circuito representado en la figura 2.1 estas relaciones son

$$V_1 = V_g \qquad V_3 = Z_3 I_3 \qquad V_5 = Z_5 I_5 \qquad (2.1)$$
$$V_2 = Z_2 I_2 \qquad V_4 = Z_4 I_4 \qquad I_6 = I_g$$

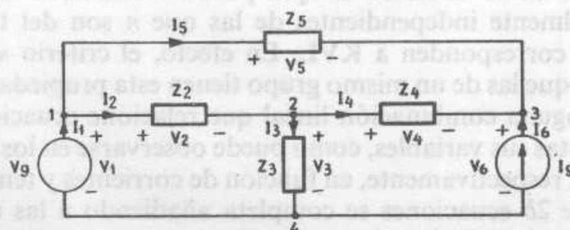



Figura 2.1 Circuito de seis ramas.

Para las $b$ ecuaciones restantes se dispone de las que resultan de aplicar las leyes de interconexión KCL y KVL, cuyo número es, en todos los casos, mayor que el de las necesarias. Un ejemplo de ello se da en el circuito de la figura 2.1, en el que con sólo plantear las ecuaciones KCL en sus cuatro nodos y las KVL en sus siete caminos cerrados se obtienen once, cuando únicamente se requieren seis. Este excesivo número de ecuaciones indica que no son linealmente independientes, surgiendo la necesidad de establecer un criterio que permita elegir a $b$ de ellas que tengan esta propiedad.

Una ayuda importante en la solución de este problema es la independencia lineal de las ecuaciones KCL formuladas en términos de las intensidades de rama y planteadas en los nodos del circuito, excepto en uno de ellos elegido arbitrariamente. En el siguiente apartado se demostrará esta propiedad, sugiriéndose aquí su comprobación para el circuito de la figura 2.1 del que, después de excluir al nodo 4, se obtienen las ecuaciones

$$
\begin{aligned}
-I_1+I_2+I_5&=0\\
I_3+I_4-I_2&=0\\
I_4+I_6+I_5&=0
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Por otra parte, en un circuito de $b$ ramas y $(n+1)$ nodos existen, y puede formularse un método para su determinación, $(b-n)$ caminos cerrados o lazos para los que las ecuaciones KVL, expresadas con las tensiones de rama como variables, son linealmente independientes. Aunque se omite la demostración para el caso general, en el apartado 2.3 se justifica que en los circuitos planos las mallas gozan de esta propiedad. Concretamente, para el representado en la figura 2.1 las ecuaciones KVL planteadas en sus mallas son

$$
\begin{aligned}
V_1-V_2-V_3&=0\\
V_3-V_4-V_6&=0\\
V_4+V_2-V_5&=0
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

entre las que no existe combinación lineal alguna.

Consecuencia de lo anterior es que puede formularse un sistema de $b$ ecuaciones linealmente independientes de las que $n$ son del tipo KCL y las $(b-n)$ restantes corresponden a KVL. En efecto, el criterio seguido para su elección asegura que las de un mismo grupo tienen esta propiedad y, además, no puede existir ninguna combinación lineal que relacione ecuaciones de los dos tipos al ser distintas sus variables, como puede observarse en los sistemas (2.2) y (2.3) expresados, respectivamente, en función de corrientes y tensiones de rama.

El sistema de $2b$ ecuaciones se completa añadiendo a las anteriores las $b$ relaciones constitutivas de los elementos. En este caso no queda asegurada la independencia lineal del conjunto resultante, ya que en las ecuaciones de los dos

grupos intervienen las mismas variables. Por esta razón, no se puede descartar la existencia de combinaciones lineales entre ellas, siendo posible incluso que el sistema sea incompatible, como sucede cuando se conectan en paralelo fuentes de tensión, o en serie fuentes de corriente, de valores distintos. De todas formas, para los circuitos lineales de interés práctico, que son los que responden a modelos bien planteados de sistemas físicos, la solución existe y es única. Las indeterminaciones o incompatibilidades quedan relegadas a casos muy especiales que se presentan cuando la Teoría de Circuitos deriva excesivamente hacia la abstracción matemática y se aparta del objetivo de modelar e interpretar la realidad, así como de ser una herramienta útil en el diseño de sistemas con un comportamiento ajustado a especificaciones fijadas previamente. Por ello, el interés del estudio de la independencia lineal radica en la elaboración de criterios para el planteamiento de ecuaciones con esta propiedad, evitando así que circuitos con solución única aparezcan como indeterminados. Este aspecto justifica que el análisis se haga de forma sistemática y tiene mayor importancia que la detección de los casos singulares antes citados.

Comentarios aparte, se ha formulado un método que requiere un número de ecuaciones igual al doble del de elementos, lo que resulta excesivo incluso para circuitos sencillos. De ahí la necesidad de disponer de otros que, siendo más elaborados, den lugar a un número más reducido de ecuaciones. Entre ellos, los de mayor eficacia son el Nodal y el de las corrientes de malla, basados respectivamente en las ecuaciones KCL y KVL antes definidas.

Tres son las cuestiones fundamentales que se plantean en la elaboración de estos métodos:

1. La definición de un conjunto homogéneo de variables generadoras, tensiones o corrientes, con la propiedad de que las variables de rama de su misma naturaleza coincidan con una de ellas o se puedan determinar como diferencia de dos.
2. La formulación sistemática de un número de ecuaciones igual al de variables generadoras, en las que éstas sean las únicas incógnitas, siendo deseable que su planteamiento pueda hacerse por inspección del circuito.
3. El planteamiento de una ecuación para cada una de las variables de rama que permita su determinación por separado, a partir de los valores de las variables generadoras y de los parámetros de los elementos.

Una interpretación errónea de lo anterior podría hacer pensar que para un circuito de $b$ ramas, a cuyo análisis se aplica un método que exige definir $n_G$ variables generadoras, es preciso plantear y resolver dos sistemas de $n_G$ y $2b$ ecuaciones, respectivamente. Si esto fuese cierto, las ventajas frente al método general antes descrito serían muy discutibles. Por el contrario, de lo que realmente se trata es de obtener las variables generadoras a través de un sistema de $n_G$ ecuaciones para, a partir de ellas, determinar las de rama, una a una y separadamente.

De los métodos que responden a estas características se describen el Nodal y el de las corrientes de malla. Su interés deriva de que, para una amplia gama de circuitos, la elección de las variables generadoras y el planteamiento de las

ecuaciones puede hacerse por inspección. Este aspecto determina que, además de ser los más eficaces en el análisis manual, se utilicen también en el automático.

Del Método Nodal se exponen los fundamentos, los resultados que permiten la formulación por inspección de las ecuaciones de circuitos con fuentes de corriente independientes y controladas por tensión, resistores, inductores y condensadores, así como el algoritmo según el cual los valores de estos elementos se incorporan a la matriz del sistema y al vector de términos independientes. Este último aspecto puede constituir el punto de partida en la elaboración de un programa para generar automáticamente las ecuaciones nodales de circuitos con los elementos citados. Asimismo, se presentan las modificaciones necesarias para su adaptación a casos de tanto interés como son los circuitos excitados con fuentes de tensión y los que incluyen amplificadores operacionales.

Partiendo del Método Nodal, y a través del concepto de dualidad, se formula el Método de las corrientes de malla. Aunque su campo de aplicación está limitado a los circuitos planos, es muy adecuado en el análisis manual o automático de circuitos de este tipo que, además de resistores, inductores y condensadores, incluyen fuentes de tensión independientes o controladas por corriente, pudiéndose, en este caso, formular las ecuaciones por inspección.

Por otra parte, no se tratan los métodos en los que las variables generadoras son conjuntos híbridos de tensiones y corrientes, ya que su interés es muy limitado al presentar importantes dificultades tanto la elección de dichas variables como el planteamiento sistemático de las ecuaciones.

Para el análisis de circuitos sin ninguna restricción en cuanto a su carácter plano y al tipo de elementos que incluyen, existen métodos generales que, por el elevado número de ecuaciones a que dan lugar, están más orientadas al análisis automático que al manual. De ellos se presentan en este texto el Nodal Modificado y el de los dos grafos.

## 2.2 METODO NODAL

### 2.2.1 Variables generadoras y ecuaciones nodales

Al ser el objetivo del análisis de un circuito la determinación de las tensiones y corrientes de rama, parece lógico pensar que un subconjunto de ellas pueden ser las variables generadoras más adecuadas. Muy al contrario, en los métodos que siguen esta línea ni siquiera la elección de las variables puede hacerse por inspección del circuito. Esta dificultad no se da en el Método Nodal, en el que se definen las variables y se formulan las ecuaciones en algo de tan fácil identificación como son los nodos.

Por el momento, el estudio del Método Nodal se hará para circuitos que no incluyen fuentes de tensión, generalizándose más adelante para este tipo de elementos. Con esta restricción, para un circuito cuyo esquema general se representa en la figura 2.2, se elige arbitrariamente uno de los nodos como nodo

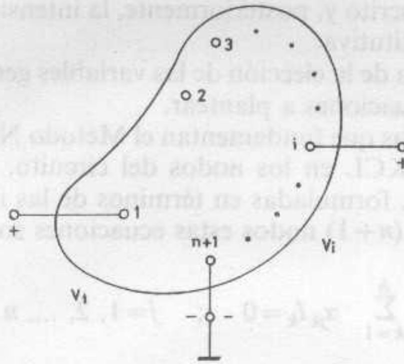



Figura 2.2 Esquema general de un circuito.

de referencia, siendo las variables generadoras las tensiones de los restantes con respecto a él.

Las variables así definidas reciben el nombre de tensiones nodales y tienen carácter generador ya que las tensiones de rama coinciden con una de ellas o son iguales a la diferencia de dos, tal como se ilustra en la figura 2.3.

También las corrientes de rama pueden obtenerse a partir de las tensiones nodales utilizando para ello las relaciones constitutivas. En efecto, para un elemento definido por su admitancia se cumple que

$$I_k = Y_k V_k \tag{2.4}$$

donde $V_k$ es la tensión de rama, $I_k$ la corriente entrante en el elemento por su terminal positivo e $Y_k$ su admitancia, cuyo valor es igual a $G$, $Cs$ y $1/Ls$, para resistores, condensadores e inductores, respectivamente. En el caso de fuentes independientes de corriente, la intensidad de rama coincide con su valor, mientras que para las controladas se determina primero la variable de control

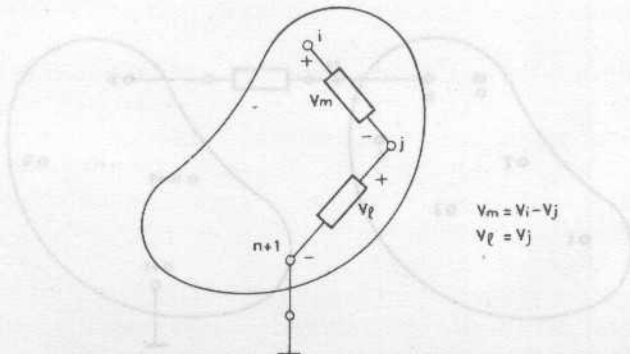



Figura 2.3 Tensiones de ramas en función de las tensiones nodales.

aplicando el método descrito y, posteriormente, la intensidad en la fuente a través de su relación constitutiva.

Resuelto el problema de la elección de las variables generadoras, la siguiente cuestión trata de las ecuaciones a plantear.

Se describirán aquí las que fundamentan el Método Nodal y que son las que se obtienen al aplicar KCL en los nodos del circuito, excepto uno de ellos elegido arbitrariamente, formuladas en términos de las intensidades de rama.

Para un circuito de $(n+1)$ nodos estas ecuaciones son de la forma

$$\sum_{k=1}^{b} \alpha_{jk} I_k = 0 \quad ; \quad j=1, 2, ..., n \qquad (2.5)$$

donde el sumatorio se extiende a las $b$ ramas y $\alpha_{jk}$ es igual a cero si la rama $k$ no está conectada al nodo $j$, tomando, en caso contrario, los valores $+1$ o $-1$ según la corriente $I_k$ en dicha rama salga o entre al nodo $j$, respectivamente.

Para un circuito conexo, entendiendo por tal aquel en que dos cualesquiera de sus nodos están conectados a través de un subconjunto de sus ramas, las ecuaciones (2.5) son linealmente independientes. En efecto, si no tuviesen esta propiedad existiría una relación lineal entre un número $m$ de ellas, siendo $m \leqslant n$. Asignando números de orden correlativos de 1 a $m$ a los nodos correspondientes a estas ecuaciones, se cumplirá que

$$\lambda_1(\mathrm{KCL})_1 + \lambda_2(\mathrm{KCL})_2 + ... + \lambda_i(\mathrm{KCL})_i + ... + \lambda_m(\mathrm{KCL})_m = 0 \qquad (2.6)$$

donde $(\mathrm{KCL})_i$ simboliza el primer miembro de la ecuación KCL correspondiente al nodo $i$ y los coeficientes $\lambda_i$ son distintos de cero para todo $i \leqslant m$.

Si se agrupan en dos subcircuitos los $m$ primeros nodos y los restantes, tal como se indica en la figura 2.4, el carácter conexo del circuito asegura la existencia de al menos una rama conectada a nodos de cada una de las dos partes.

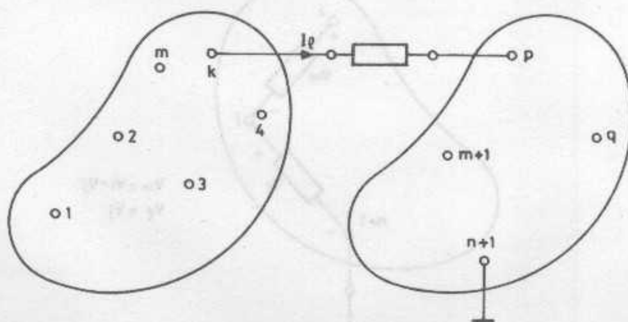



Figura 2.4 Subcircuitos de un circuito conexo.

Llamando $I_l$ a la intensidad de la corriente en dicha rama y asignando los números de orden $k$ y $p$ a sus nodos, en la expresión

$$\lambda_1(\text{KCL})_1 + \lambda_2(\text{KCL})_2 + \ldots + \lambda_k(\text{KCL})_k + \ldots + \lambda_m(\text{KCL})_m = 0 \qquad (2.7)$$

la variable $I_l$ aparece únicamente en $(\text{KCL})_k$, por lo que sólo podrá cumplirse si $\lambda_k = 0$, resultado contradictorio con la hipótesis establecida, al ser $k \leqslant m$.

La independencia lineal no se da si se añade al sistema (2.5) la ecuación KCL del nodo excluido. En este caso, la suma de todas ellas es nula, ya que la intensidad de una cualquiera de las ramas sale de un nodo y entra en otro, por lo que aparece en dos de las ecuaciones con signo distinto. Como corolario, la ecuación KCL de un nodo es igual a la suma cambiada de signo de las correspondientes a los restantes nodos del circuito.

El sistema (2.5) es el punto de partida en el desarrollo del Método Nodal, que consiste en la expresión de las intensidades de rama $I_k$ en función de las tensiones nodales, utilizando para ello las relaciones constitutivas de los elementos. En los apartados siguientes se describe su aplicación a distintos tipos de circuitos.

### 2.2.2 El Método Nodal en el análisis de circuitos RLCJ

El Método Nodal es de aplicación inmediata en el análisis de circuitos RLC excitados con fuentes independientes de corriente $J$ (circuitos RLCJ), ya que, como se verá en el desarrollo de este apartado, sus ecuaciones pueden plantearse por inspección y tienen una estructura muy adecuada para ser formuladas automáticamente por ordenador.

Tal como se representa en la figura 2.2, en un circuito RLCJ de $(n+1)$ nodos las variables generadoras, llamadas tensiones nodales, se definen como las tensiones de $n$ de ellos con respecto al restante que se elige arbitrariamente y al que se denomina «datum» o nodo de referencia. En cuanto a las ecuaciones, son las que resultan de aplicar KCL a dichos $n$ nodos, expresadas en función de las tensiones nodales, haciendo intervenir para ello las relaciones constitutivas de los elementos. Esto justifica que en el sistema aparezcan las admitancias de los resistores, inductores y condensadores, además de los valores de las fuentes independientes de corriente, que pueden corresponder a las que modelan las señales de entrada o las condiciones iniciales del circuito. En la figura 2.5 se

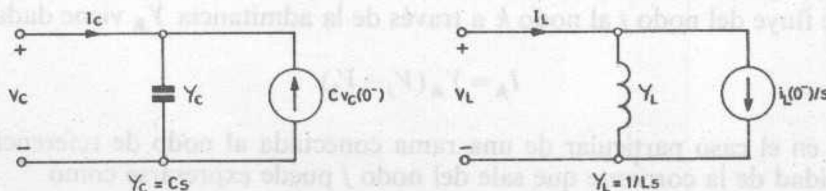



Figura 2.5 Transformado del condensador y del inductor.

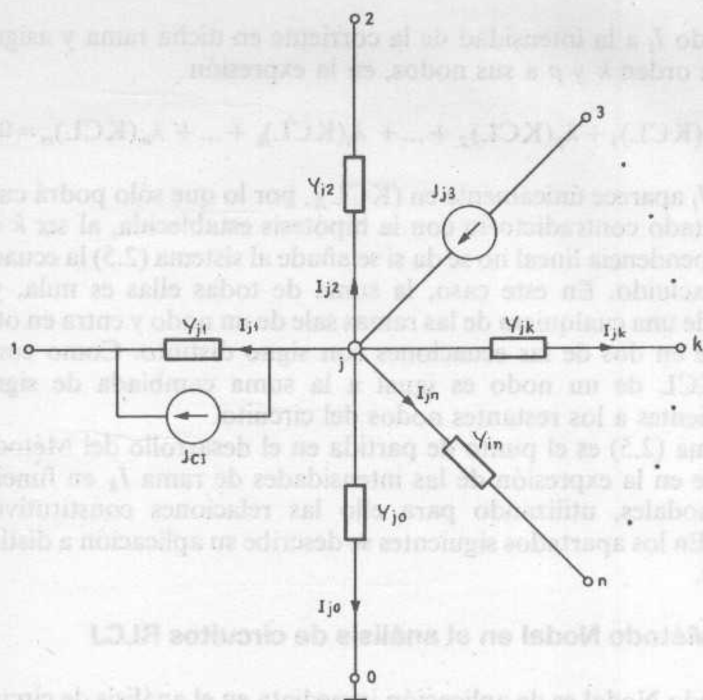



Figura 2.6 Nodo genérico de un circuito RLCJ.

representa el transformado del condensador y del inductor con el valor de su admitancia y de las fuentes de condiciones iniciales.

Para el nodo genérico $j$, representado en la figura 2.6, la ecuación KCL es

$$I_{j0}+I_{j1}+I_{j2}+\ldots+I_{jk}+\ldots+I_{jn}=J_{j3}-J_{CI} \quad (2.8)$$

donde $I_{jk}$ es la corriente que sale del nodo $j$ a través de la admitancia $Y_{jk}$, siendo $J_{j3}$ y $J_{CI}$ los valores de las fuentes independientes de corriente conectadas a dicho nodo, que modelan las excitaciones exteriores y las condiciones iniciales respectivamente.

Se trata ahora de expresar las corrientes en las admitancias en función de las tensiones nodales. Para ello se tendrá en cuenta que la intensidad de la corriente $I_{jk}$ que fluye del nodo $j$ al nodo $k$ a través de la admitancia $Y_{jk}$ viene dada por

$$I_{jk}=Y_{jk}(V_j-V_k) \quad (2.9)$$

y que en el caso particular de una rama conectada al nodo de referencia, la intensidad de la corriente que sale del nodo $j$ puede expresarse como

$$I_{j0}=Y_{j0}V_j \quad (2.10)$$

con lo que la ecuación (2.8) se transforma en

$$Y_{j0}V_j + Y_{j1}(V_j - V_1) + Y_{j2}(V_j - V_2) + \ldots + Y_{jk}(V_j - V_k) +$$
$$+ \ldots + Y_{jn}(V_j - V_n) = J_{j3} - J_{CI} \quad (2.11)$$

de la que, reordenando términos, se obtiene

$$-Y_{j1}V_1 - Y_{j2}V_2 - \ldots + (Y_{j0} + Y_{j1} + Y_{j2} + \ldots + Y_{jk} + \ldots + Y_{jn})V_j -$$
$$- \ldots - Y_{jn}V_n = J_{j3} - J_{CI} \quad (2.12)$$

Como puede observarse, el coeficiente de la tensión $V_j$ del nodo $j$, en el que se plantea la ecuación KCL, es igual a la suma de las admitancias a él conectadas; el coeficiente de la tensión del nodo $k$, $V_k$, distinto de $j$ y del de referencia, es igual a la suma cambiada de signo de las admitancias conectadas entre los nodos $j$ y $k$; mientras que el término independiente es igual a la suma de los valores de las fuentes independientes de corriente (generadores de las señales de entrada y condiciones iniciales) que inciden en el nodo $j$, con signo positivo las entrantes y negativo las salientes.

Repitiendo el proceso para todos los nodos del circuito, excepto el de referencia, se obtiene el sistema de ecuaciones nodales, cuya forma matricial es

$$\begin{bmatrix} Y_{11} \cdots Y_{1j} \cdots Y_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Y_{j1} \cdots Y_{jj} \cdots Y_{jn} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Y_{n1} \cdots Y_{nj} \cdots Y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ \cdots \\ V_j \\ \cdots \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 \\ \cdots \\ J_j \\ \cdots \\ J_n \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

que puede escribirse como

$$\underset{\sim}{Y}\underline{V} = \underline{J} \quad (2.14)$$

donde $\underline{V}$ es el vector de las tensiones nodales y $\underline{J}$ el vector excitación, cuyos términos son iguales a la suma algebraica de los valores de las fuentes independientes de corriente entrantes en cada uno de los nodos, excepto el de referencia.

En cuanto a la matriz del sistema $Y$, llamada matriz de admitancia nodal, su orden es inferior en una unidad al número de nodos del circuito, siendo los términos de la diagonal principal $Y_{jj}$ iguales a la suma de las admitancias conectadas al nodo $j$, y los restantes elementos $Y_{jk}$ a la suma cambiada de signo de las admitancias conectadas entre los nodos $j$ y $k$, distintos ambos del de referencia.

Este resultado permite la formulación de las ecuaciones nodales de un circuito RLCJ por inspección. Por otra parte, puede observarse que la matriz de admitancia nodal es simétrica.

Al ser las admitancias del condensador, resistor e inductor iguales, respectivamente, a $Cs$, $G$ y $1/Ls$, la matriz $\underset{\sim}{Y}(s)$ puede expresarse como

$$\underset{\sim}{Y}(s)=s\underset{\sim}{C}+\underset{\sim}{G}+s^{-1}\underset{\sim}{1/L} \qquad (2.15)$$

donde las matrices $\underset{\sim}{C}$, $\underset{\sim}{G}$, y $\underset{\sim}{1/L}$ son reales y tienen una estructura similar a $\underset{\sim}{Y}(s)$.

Cabe destacar que el primer miembro de las ecuaciones nodales (2.13) expresa la suma de las corrientes que salen de los nodos, excepto el de referencia, a través de las admitancias, mientras que el segundo incorpora las intensidades de las fuentes independientes de corriente. Este aspecto tendrá interés en la generalización del Método Nodal para aplicarlo al análisis de circuitos con elementos de otro tipo.

Del sistema (2.14) se puede obtener el vector $\underline{V}$ de las tensiones de los nodos como producto de la inversa de la matriz de admitancia nodal $\underset{\sim}{Y}$ y el vector excitación $\underline{J}$, según la expresión

$$\underline{V}=\underset{\sim}{Y}^{-1}\underline{J} \qquad (2.16)$$

En el análisis manual el cálculo de las tensiones de nodo es más fácil de resolver por cociente de determinantes. En un capítulo posterior se describirán otros métodos de solución más adecuados al análisis por ordenador.

Para la elaboración de un programa que genere automáticamente las ecuaciones nodales a partir de la descripción del circuito, es interesante estudiar las posiciones que irán ocupando en las matrices los valores de cada uno de los elementos.

Como se indica en la figura 2.7 la admitancia $Y$ de una rama conectada a los nodos $i$ y $j$ se incorpora a la matriz de admitancia nodal $\underset{\sim}{Y}$, con signo positivo en los elementos de la diagonal principal $Y_{ii}$ e $Y_{jj}$ y negativo en $Y_{ij}$ e $Y_{ji}$, mientras que para una fuente independiente de corriente entrante en el nodo $k$ y saliente del $l$, su valor $J$ aparece en el vector excitación $\underline{J}$ en las filas $k$ y $l$ con signo positivo y negativo, respectivamente. En el caso particular de elementos conectados al nodo de referencia, sus valores intervienen únicamente en el término de la diagonal principal de $\underset{\sim}{Y}$ o en la fila de $\underline{J}$ correspondientes a su otro terminal.

Sobre esta base puede elaborarse un algoritmo para la obtención automática de las ecuaciones nodales. Para un circuito RLCJ de $(n+1)$ nodos se dimensiona una matriz cuadrada de orden $(n+1)$ y un vector de $(n+1)$ componentes, a cuyos términos se les asigna inicialmente el valor cero. El siguiente paso consiste en sumar o restar de dichos términos el valor de cada uno de los elementos en la forma indicada en la figura 2.7. Finalmente, al suprimir la fila y columna de la matriz cuadrada y la fila del vector, correspondientes al nodo de referencia, se obtienen la matriz de admitancia nodal $\underset{\sim}{Y}$ y el vector de excitación $\underline{J}$.

La sencillez de este algoritmo hace que el Método Nodal aplicado a circuitos RLCJ sea muy adecuado para su implementación en ordenador.

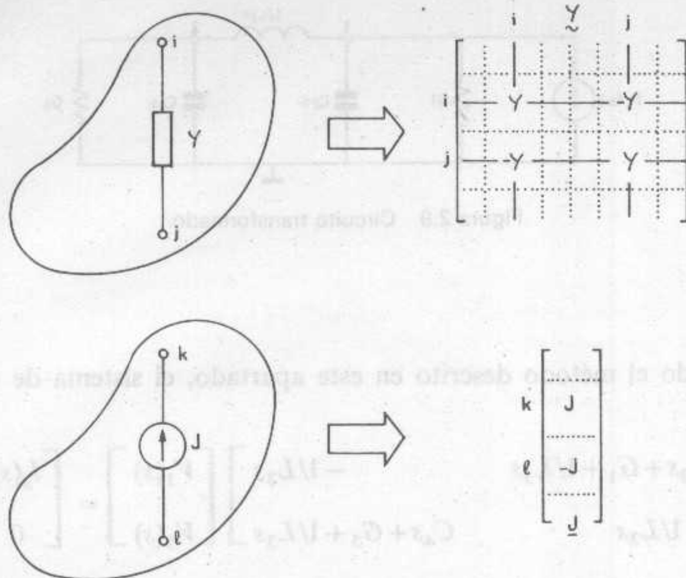



Figura 2.7 Incorporación de los valores de los elementos a la matriz del sistema y al vector excitación.

*Ejemplo 2.1. Circuito RLCJ. Planteamiento y solución del sistema de ecuaciones nodales.*

En la figura 2.8 se representa un circuito RLCJ de tercer orden.

Se trata de plantear el sistema de ecuaciones nodales y determinar la tensión del nodo 2, $V_2(s)$, en función de la excitación $I_g(s)$, en el caso de condiciones iniciales nulas, es decir, que en el momento de insertar la excitación en el circuito las tensiones en los condensadores y la corriente en el inductor sean iguales a cero.

La figura 2.9 ilustra el circuito transformado con los valores de las admitancias de los elementos.

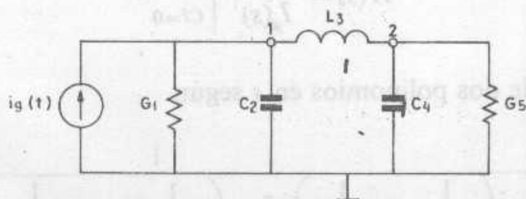



Figura 2.8 Circuito RLCJ.

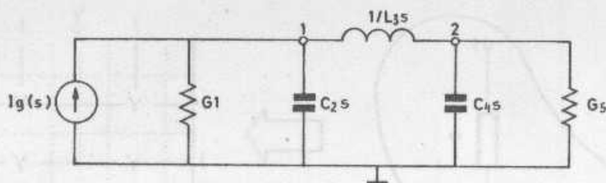



Figura 2.9 Circuito transformado.

Aplicando el método descrito en este apartado, el sistema de ecuaciones nodales es

$$\begin{bmatrix} C_2s+G_1+1/L_3s & -1/L_3s \\ -1/L_3s & C_4s+G_5+1/L_3s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_g(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

La tensión $V_2(s)$ puede obtenerse como cociente de los determinantes

$$\Delta_2(s) = \begin{vmatrix} C_2s+G_1+1/L_3s & I_g(s) \\ -1/L_3s & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} C_2s+G_1+1/L_3s & -1/L_3s \\ -1/L_3s & C_4s+G_5+1/L_3s \end{vmatrix}$$

siendo su expresión en función de la excitación $I_g(s)$ y de los valores de los elementos

$$V_2(s)= \frac{1}{C_2C_4L_3s^3+L_3(G_5C_2+G_1C_4)s^2+(C_2+C_4+L_3G_1G_5)s+G_1+G_5} I_g(s)$$

resultado que permite determinar la función de red definida por

$$H(s)= \left. \frac{V_2(s)}{I_g(s)} \right|_{CI=0}$$

como el cociente de dos polinomios en $s$ según

$$H(s)= \frac{1}{C_2C_4L_3} \frac{1}{s^3+\left(\frac{1}{R_5C_4}+\frac{1}{R_1C_2}\right)s^2+\left(\frac{1}{C_{eq}L_3}+\frac{1}{R_1R_5C_2C_4}\right)s+\frac{1}{R_{eq}C_2C_4L_3}}$$

donde

$$C_{eq}=\frac{C_2C_4}{C_2+C_4} \quad ; \quad R_{eq}=\frac{R_1R_5}{R_1+R_5}$$

En caso de que en el circuito existan condiciones iniciales distintas de cero, tal como se indica en la figura 2.10, el circuito transformado es el que se representa en la figura 2.11.

Con respecto al caso anterior, la matriz de admitancia nodal no ha sufrido cambio alguno, mientras que el vector excitación incluye, además de $I_g(s)$, las fuentes independientes de corriente que modelan las condiciones iniciales.

El sistema de ecuaciones nodales es

$$\begin{bmatrix} C_2s+G_1+1/L_3s & -1/L_3s \\ -1/L_3s & C_4s+G_5+1/L_3s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_g(s)+C_2v_{C2}(0^-)-i_{L3}(0^-)/s \\ C_4v_{C4}(0^-)+i_{L3}(0^-)/s \end{bmatrix}$$

del que puede obtenerse $V_2(s)$ en función de los valores del generador de entrada y de las condiciones iniciales, según la expresión

$$V_2(s)=\frac{1}{D(s)}\,[I_g(s)+C_2v_{C2}(0^-)+L_3(C_2s+G_1)i_{L3}(0^-)+$$
$$+C_4(C_2L_3s^2+G_1L_3s+1)v_{C4}(0^-)]$$

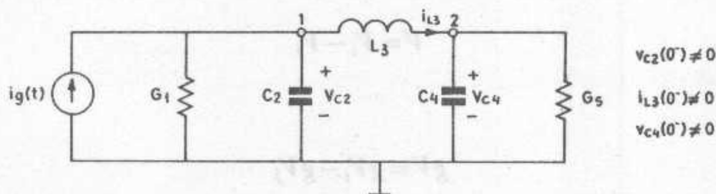



Figura 2.10 Circuito RLCJ con condiciones iniciales no nulas.

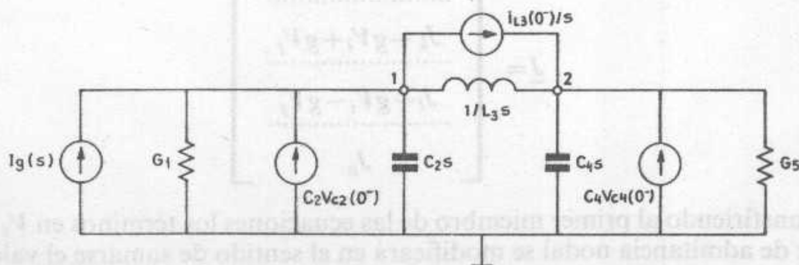



Figura 2.11 Circuito transformado con condiciones iniciales no nulas.

donde

$$D(s)=C_2C_4L_3s^3+L_3(G_5C_2+G_1C_4)s^2+(C_2+C_4+L_3G_1G_5)s+G_1+G_5$$

El polinomio $D(s)$ coincide con el denominador de la función de red calculada anteriormente. Este resultado, que es una consecuencia inmediata de que la matriz del sistema permanezca invariante al incluir en el circuito condiciones iniciales distintas de cero, explica que la forma general de la respuesta libre y de la respuesta a condiciones iniciales con excitación nula sean iguales.

### 2.2.3 Incorporación de fuentes de corriente controladas por tensión. Circuitos RLCgJ

El Método Nodal para el análisis de circuitos RLCJ admite una fácil generalización para incorporar fuentes de corriente controladas por tensión, también llamadas transductores tensión-corriente (VCT) y que se caracterizan por el valor de su transconductancia $g$.

Tal como se han formulado las ecuaciones nodales de un circuito RLCJ, su primer miembro incluye únicamente las corrientes que salen de los nodos a través de las admitancias, por lo que la adaptación del Método Nodal a circuitos con fuentes de corriente controladas por tensión puede hacerse incorporando al vector excitación la intensidad en estos elementos. Además, con el fin de no introducir en el sistema variables distintas a las generadoras, dichas intensidades deben expresarse en función de las tensiones nodales. Para la fuente controlada representada en la figura 2.12 se cumple que

$$V=V_i-V_j \tag{2.17}$$

de donde

$$gV=gV_i-gV_j \tag{2.18}$$

El vector $\underline{J}$, con la inclusión de este elemento, pasa a ser de la forma

$$\underline{J}=\begin{bmatrix} J_1 \\ \cdots\cdots \\ J_k-gV_i+gV_j \\ \cdots\cdots \\ J_l+gV_i-gV_j \\ \cdots\cdots \\ J_n \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

Transfiriendo al primer miembro de las ecuaciones los términos en $V_i$ y $V_j$ la matriz de admitancia nodal se modificará en el sentido de sumarse el valor $g$ de la transconductancia a los elementos $Y_{ki}$ e $Y_{lj}$ y restarse de $Y_{kj}$ e $Y_{li}$, recuperando

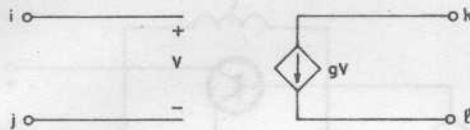



Figura 2.12 Fuente de corriente controlada por tensión. VCT.

el vector de excitación $\underline{J}$ la estructura que tenía en el caso de circuitos RLCJ.

En consecuencia, la transconductancia $g$ de la fuente de corriente controlada por tensión, con los nodos y sentidos de referencia indicados en la figura 2.12, se incorpora a la matriz de admitancia nodal según el siguiente esquema

$$\begin{array}{c} \\ k \\ \\ l \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & i & & j & \end{array} \\ \left[ \begin{array}{ccccc} \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & g & \cdots & -g & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & -g & \cdots & g & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \end{array} \right] \end{array} \qquad (2.20)$$

Este resultado puede aplicarse a completar el algoritmo para la formulación automática de las ecuaciones nodales de circuitos RLCJ y extenderlo al caso en que estén presentes transductores tensión-corriente.

Una consecuencia de lo anterior es que la existencia en el circuito de estos elementos implica, salvo casos muy especiales, la pérdida de simetría de la matriz de admitancia nodal.

Con relación a los circuitos RLCJ, las ecuaciones nodales se han modificado de forma que el primer miembro incluye también las corrientes que salen de los nodos, excepto el de referencia, a través de los transductores tensión-corriente.

El método descrito es aplicable a circuitos con fuentes de corriente controladas por corriente si previamente se transforman en fuentes de corriente controladas por tensión, expresando la intensidad de control en función de las tensiones nodales. Un ejemplo de ello se muestra en las figuras 2.14*b* y *c*.

*Ejemplo 2.2. Análisis de un circuito con fuentes de corriente controladas por tensión.*

El circuito de la figura 2.13 es de interés en el estudio del oscilador Colpitts, permitiendo su análisis la determinación de la condición y frecuencia de oscilación. No se tratan aspectos tales como el mecanismo de mantenimiento de las oscilaciones y la amplitud de las mismas, que sólo se pueden abordar considerando las características no lineales del transistor.

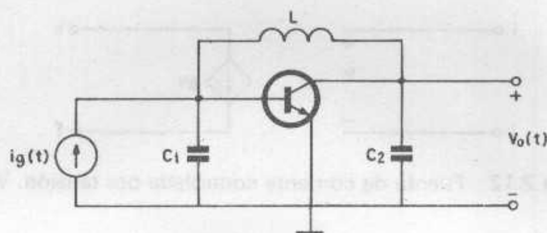


Figura 2.13 Circuito con un transistor bipolar.

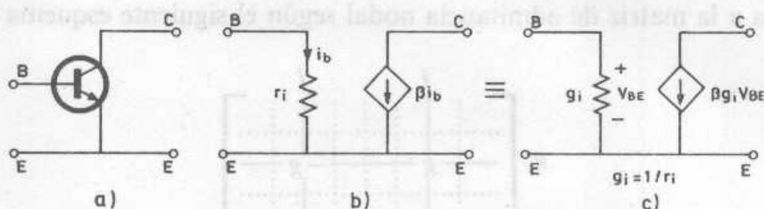


Figura 2.14 *a*) Transistor bipolar. *b*) y *c*) Modelos lineales para pequeña señal.

Para el transistor bipolar se utilizará el modelo de pequeña señal de la figura 2.14*c* que incorpora una fuente de corriente controlada por tensión y que, sustituido en el circuito propuesto, da lugar al representado en la figura 2.15.

El sistema de ecuaciones nodales, incorporando los valores de las fuentes de corriente en el segundo miembro, es

$$\begin{bmatrix} C_1 s + g_i + 1/Ls & -1/Ls \\ -1/Ls & C_2 s + 1/Ls \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_0(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_g(s) \\ -\beta g_i V_1(s) \end{bmatrix}$$

que, después de reordenar los términos para que los coeficientes de las variables aparezcan únicamente en la matriz $\underline{Y}$, se transforma en

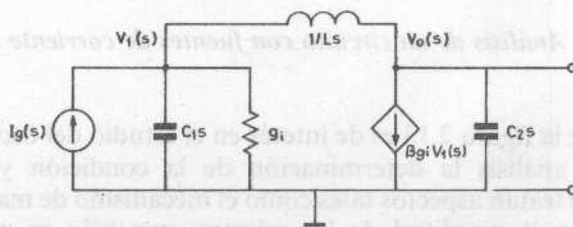


Figura 2.15 Circuito transformado.

$$\begin{bmatrix} C_1 s + g_i + 1/Ls & -1/Ls \\ \beta g_i - 1/Ls & C_2 s + 1/Ls \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_0(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_g(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema para $V_0(s)$ se llega a la expresión de la función de red

$$H(s) = \frac{V_0(s)}{I_g(s)} = -\frac{\beta g_i}{C_1 C_2} \frac{s - 1/\beta g_i L}{s^3 + \dfrac{g_i}{C_1} s^2 + \dfrac{C_1 + C_2}{C_1 C_2 L} s + \dfrac{(\beta+1) g_i}{C_1 C_2 L}}$$

que puede escribirse como

$$H(s) = \frac{V_0(s)}{I_g(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} = -\frac{\beta}{r_i C_1 C_2} \frac{s - \dfrac{r_i}{\beta L}}{s^3 + \dfrac{1}{r_i C_1} s^2 + \dfrac{C_1 + C_2}{C_1 C_2 L} s + \dfrac{\beta + 1}{r_i C_1 C_2 L}}$$

El denominador $D(s)$ de la función de red coincide, salvo un factor constante, con el de la transformada de Laplace de la respuesta a condiciones iniciales distintas de cero y excitación nula. Para que en esta respuesta exista una componente senoidal de amplitud constante, característica de un oscilador, el polinomio $D(s)$ ha de tener dos raíces (polos de la función de red) de la forma $s = \pm j\omega_0$, donde $\omega_0$ es la frecuencia de la oscilación. Para ello deberá cumplirse que

$$D(j\omega_0) = -j\omega_0^3 - \frac{\omega_0^2}{r_i C_1} + j \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2 L} \omega_0 + \frac{\beta + 1}{C_1 C_2 r_i L} = 0$$

Igualando a cero las partes real e imaginaria de $D(j\omega_0)$ se obtiene el sistema de ecuaciones

$$-\omega_0^2 + \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2 L} = 0$$

$$-\frac{\omega_0^2}{r_i C_1} + \frac{\beta + 1}{C_1 C_2 r_i L} = 0$$

cuya solución permite determinar, simultáneamente, el valor de la frecuencia y la condición de oscilación, entendida como la relación que deben guardar los parámetros del circuito para que se comporte como un oscilador. Los resultados obtenidos son

Frecuencia de oscilación: $\omega_0 = \sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_1C_2L}} = \sqrt{\frac{1}{LC_{eq}}}$; $\quad C_{eq} = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$

Condición de oscilación: $C_2/C_1 = \beta$

En realidad el circuito se diseña con

$$C_2/C_1 < \beta$$

para que así sea inicialmente inestable, produciéndose al principio una oscilación de amplitud creciente que se estabiliza de forma automática por un mecanismo no lineal que actúa en todos los dispositivos electrónicos.

### 2.2.4 Generalización del Método Nodal

De los apartados anteriores se concluye que el Método Nodal es especialmente adecuado para el análisis de circuitos RLCgJ al permitir el planteamiento de las ecuaciones por inspección y el desarrollo de un sencillo algoritmo para su generación por ordenador.

Quedan por tratar circuitos de tanto interés como son los que incluyen amplificadores operacionales, a los que puede aplicarse un método derivado del nodal que, como se verá en este apartado, es de gran eficacia tanto en el análisis manual como en el automático.

Por otra parte, con bastante frecuencia la excitación se modela con fuentes independientes de tensión. Aunque para este tipo de elementos es especialmente adecuado el método de las corrientes de malla que se presenta en el apartado 2.3, la estructura del resto del circuito puede ser tal que este método sea difícilmente aplicable. Esta circunstancia, que se da en los circuitos con amplificadores operacionales, justifica adaptar el Método Nodal al análisis de circuitos con fuentes de tensión, tema que se trata seguidamente.

*A. El Método Nodal en el análisis de circuitos con fuentes de tensión*

Para la adaptación del Método Nodal a circuitos con fuentes de tensión existen diversas vías. Una de ellas se basa en la transformación de estos elementos en fuentes de corriente aplicando la equivalencia de las formas Thevenin y Norton representada en la figura 2.16, de manera que las ecuaciones nodales del circuito resultante puedan plantearse directamente.

Se presenta la dificultad de que esta transformación sólo es posible si la fuente de tensión está conectada en serie a una impedancia. En caso contrario, se puede recurrir al método llamado de movilidad de generadores que consiste en cambiar la posición de las fuentes del circuito de forma que sus ecuaciones KVL no varíen, quedando así asegurada la equivalencia entre el circuito inicial y el resultante de esta modificación. En la figura 2.17 se ilustra el método. La fuente de tensión de valor $V_g$ pasa a través del nodo $j$, desdoblándose y

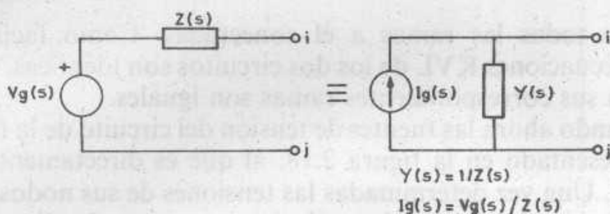



Figura 2.16 Equivalencia entre las formas Thevenin y Norton.

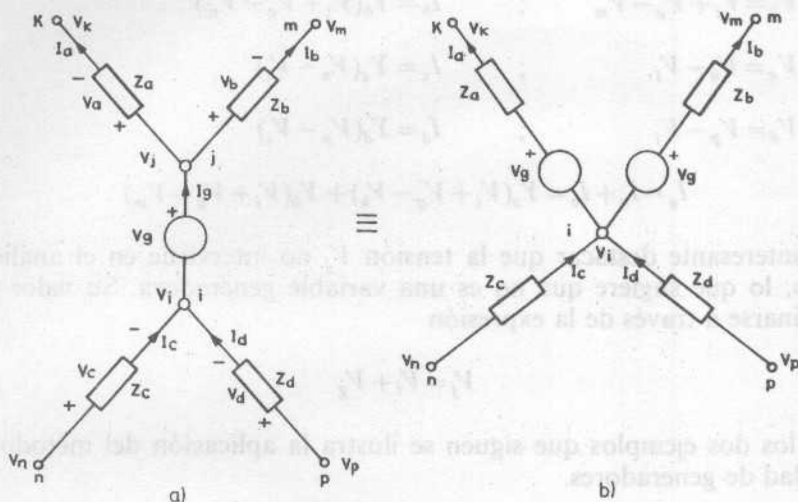



Figura 2.17 Movilidad de generadores.

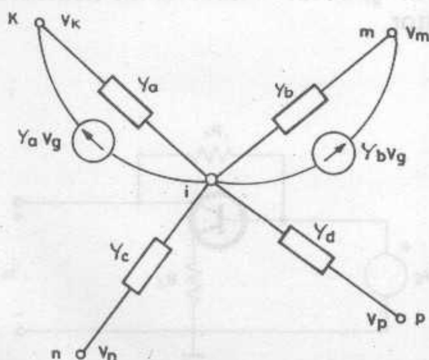



Figura 2.18 Transformación de fuentes de corriente en fuentes de tensión.

apareciendo en todas las ramas a él conectadas. Como fácilmente puede verificarse, las ecuaciones KVL de los dos circuitos son idénticas, por lo que las intensidades en sus correspondientes ramas son iguales.

Transformando ahora las fuentes de tensión del circuito de la figura 2.17*b* se obtiene el representado en la figura 2.18, al que es directamente aplicable el Método Nodal. Una vez determinadas las tensiones de sus nodos, las variables de rama del circuito inicial pueden calcularse a partir de ellas aplicando las expresiones

$$\begin{aligned}
V_a &= V_i + V_g - V_k \quad &;\quad I_a &= Y_a(V_i + V_g - V_k) \\
V_b &= V_i + V_g - V_m \quad &;\quad I_b &= Y_b(V_i + V_g - V_m) \\
V_c &= V_n - V_i \quad &;\quad I_c &= Y_c(V_n - V_i) \\
V_d &= V_p - V_i \quad &;\quad I_d &= Y_d(V_p - V_i)
\end{aligned} \tag{2.21}$$

$$I_g = I_a + I_b = Y_a(V_i + V_g - V_k) + Y_b(V_i + V_g - V_m)$$

Es interesante destacar que la tensión $V_j$ no interviene en el análisis del circuito, lo que sugiere que no es una variable generadora. Su valor puede determinarse a través de la expresión

$$V_j = V_i + V_g \tag{2.22}$$

En los dos ejemplos que siguen se ilustra la aplicación del método de la movilidad de generadores.

*Ejemplo 2.3 Análisis nodal de un circuito excitado con una fuente independiente de tensión.*

Para el circuito de la figura 2.19 se trata de determinar la tensión $V_0$ en función de la excitación $V_g$, de los valores de los elementos y de los parámetros del modelo del transistor.

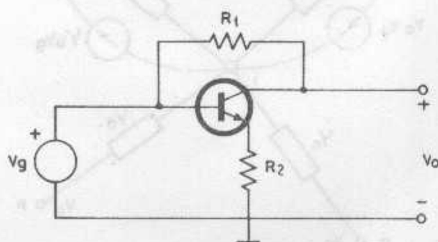



Figura 2.19 Circuito excitado con una fuente de tensión.

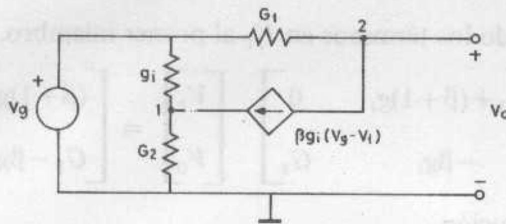



Figura 2.20 Circuito para pequeña señal.

Sustituyendo el transistor bipolar por el modelo de pequeña señal de la figura 2.14*c*, resulta el circuito representado en la figura 2.20.

Aplicando el método de la movilidad de generadores se obtiene el circuito de la figura 2.21*a*, que puede representarse tal como se indica en la figura 2.21*b*.

Transformando las fuentes de tensión en fuentes de corriente el circuito se convierte en el de la figura 2.22, cuyo sistema de ecuaciones nodales es

$$\begin{bmatrix} G_2+g_i & 0 \\ 0 & G_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_i V_g + \beta g_i (V_g - V_1) \\ G_1 V_g - \beta g_i (V_g - V_1) \end{bmatrix}$$

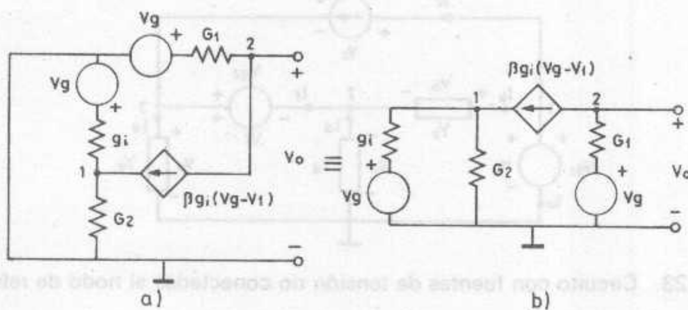



Figura 2.21 Aplicación de movilidad de generadores.

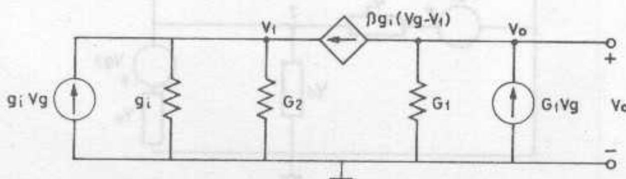



Figura 2.22 Circuito equivalente con fuentes de corriente.

del que, transfiriendo los términos en $V_1$ al primer miembro, resulta el sistema

$$\begin{bmatrix} G_2+(\beta+1)g_i & 0 \\ -\beta g_i & G_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\beta+1)g_i \\ G_1-\beta g_i \end{bmatrix} V_g$$

que tiene como solución

$$\frac{V_0}{V_g} = \frac{(\beta+1)g_iG_1+G_2G_1-\beta g_iG_2}{G_1[(\beta+1)g_i+G_2]} = \frac{(\beta+1)R_2+r_i-\beta R_1}{(\beta+1)R_2+r_i}$$

*Ejemplo 2.4 Circuito con más de una fuente de tensión.*

Se trata de analizar el circuito de la figura 2.23 previa transformación de sus fuentes de tensión en fuentes de corriente.

Aplicando movilidad de generadores a las fuentes de valores $V_{g1}$ y $V_{g2}$ resulta el circuito de la figura 2.24.

Después de suprimir las fuentes de tensión en serie con fuentes de corriente, por tratarse de elementos superfluos, y aplicar la equivalencia de las formas Thevenin y Norton, resulta el circuito de la figura 2.25.

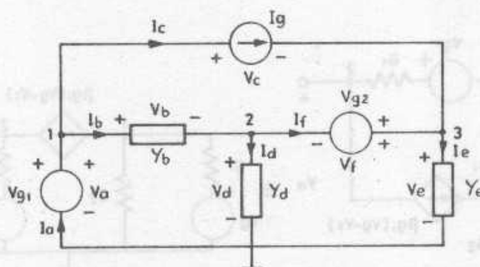



Figura 2.23 Circuito con fuentes de tensión no conectadas al nodo de referencia.

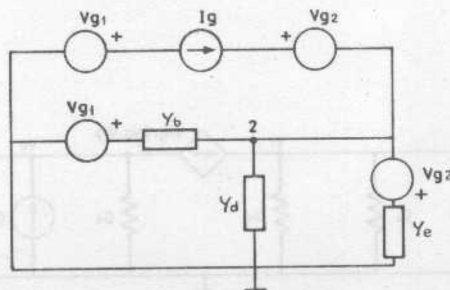



Figura 2.24 Aplicación de movilidad de generadores.

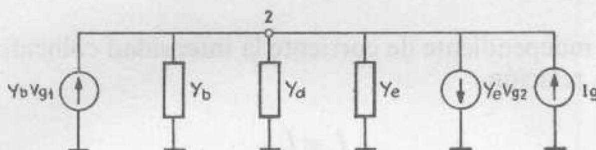



Figura 2.25 Circuito equivalente con fuentes de corriente.

Su ecuación nodal es

$$(Y_b + Y_d + Y_e)V_2 = I_g + Y_b V_{g1} - Y_e V_{g2}$$

que permite la determinación de la tensión del nodo 2 según

$$V_2 = \frac{1}{Y_b + Y_d + Y_e}(I_g + Y_b V_{g1} - Y_e V_{g2})$$

Las restantes tensiones nodales del circuito propuesto (figura 2.23) se pueden obtener a partir de $V_2$ y de los valores de las fuentes de tensión, según las expresiones

$$V_1 = V_{g1}$$

$$V_3 = V_2 + V_{g2}$$

siendo las tensiones de rama

$$V_a = V_{g1}$$

$$V_b = V_1 - V_2 = V_{g1} - V_2$$

$$V_c = V_1 - V_3 = V_{g1} - V_2 - V_{g2}$$

$$V_d = V_2$$

$$V_e = V_3 = V_2 + V_{g2}$$

$$V_f = V_{g2}$$

En cuanto a las intensidades, para los elementos definidos por su admitancia se obtienen como producto de este parámetro por la tensión de rama, según

$$I_b = Y_b V_b = Y_b(V_{g1} - V_2)$$

$$I_d = Y_d V_d = Y_d V_2$$

$$I_e = Y_e V_e = Y_e(V_2 + V_{g2})$$

En la fuente independiente de corriente la intensidad coincide con su valor, cumpliéndose la relación

$$I_c = I_g$$

mientras que la determinación de las corrientes en las fuentes de tensión se hace a partir de la ecuación KCL planteada en uno de sus nodos, que son de la forma

$$I_a = I_b + I_g = Y_b(V_{g1} - V_2) + I_g$$
$$I_f = I_e - I_g = Y_e(V_2 + V_{g2}) - I_g$$

En este análisis se ha puesto de manifiesto el carácter generador de $V_2$, ya que las restantes tensiones nodales y las variables de rama pueden expresarse en función de su valor y de los parámetros de los elementos.

Una vía alternativa en el análisis de circuitos con fuentes de tensión consiste en aplicar el Método Nodal sin transformar previamente estos elementos.

Para el caso general, cuyo esquema se representa en la figura 2.26, la tensión del nodo 1 es conocida

$$V_1 = V_{g1} \tag{2.23a}$$

y las de los nodos $i$ y $j$ están relacionadas por la expresión

$$V_i - V_j = V_{g2} \tag{2.23b}$$

lo que significa que por cada fuente de tensión se reduce en una unidad el número de variables generadoras. En el circuito de $(n+1)$ nodos de la figura 2.26 estas variables son las tensiones nodales después de excluir a $V_i$ o a $V_j$, además de $V_1$. Su número es igual a $(n-2)$.

En cuanto a las $(n-2)$ ecuaciones necesarias se dispone lógicamente de las $(n-3)$ que resultan de aplicar KCL en los nodos a los que no están conectadas

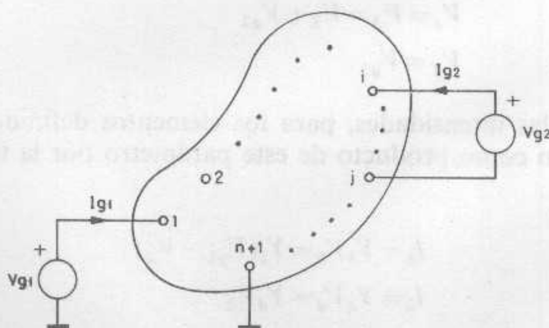



Figura 2.26 Esquema general de un circuito con fuentes de tensión.

fuentes de tensión. Al plantear la ecuación restante se presenta el problema de que la correspondiente al nodo 1 introduciría la nueva variable $I_{g1}$, y que las de los nodos $i$ y $j$ incluyen $I_{g2}$. Esta dificultad se resuelve incorporando al sistema la suma de las ecuaciones KCL de los nodos $i$ y $j$, eliminándose así la variable $I_{g2}$, al aparecer en cada una de ellas con signos distintos.

En conclusión, las variables generadoras son las tensiones de los nodos del circuito después de excluir el de referencia y uno de los terminales de cada fuente de tensión, incluyendo el sistema de ecuaciones las KCL planteadas en los nodos a los que no están conectados estos elementos y la suma de las correspondientes a los terminales de las fuentes no unidas al nodo de referencia.

La aplicación del método descrito a los circuitos propuestos en los ejemplos anteriores puede ayudar a su comprensión.

*Ejemplo 2.5 Circuito excitado con una fuente de tensión.*

Se pretende analizar el circuito de la figura 2.19 y su equivalente de la figura 2.20 sin transformar las fuentes de tensión en fuentes de corriente.

Después de excluir el nodo del generador $V_g$ las variables son las tensiones nodales $V_1$ y $V_0$. Las ecuaciones adecuadas a este caso se obtienen de aplicar KCL a los nodos 1 y 2 cuya expresión es

$$g_i(V_1 - V_g) + G_2 V_1 = \beta g_i(V_g - V_1)$$
$$G_1(V_0 - V_g) = -\beta g_i(V_g - V_1)$$

Reordenando los términos de forma que en el segundo miembro aparezca únicamente la excitación $V_g$, resulta el sistema

$$\begin{bmatrix} G_2 + (\beta+1)g_i & 0 \\ -\beta g_i & G_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\beta+1)g_i \\ G_1 - \beta g_i \end{bmatrix} V_g$$

que coincide exactamente con el obtenido al aplicar el método basado en la transformación de fuentes.

*Ejemplo 2.6 Circuito con fuentes de tensión no conectadas al nodo de referencia.*

Según lo explicado anteriormente en este apartado, al definir las variables generadoras en el circuito de la figura 2.23 se deben excluir la tensión del nodo 1 y una de las correspondientes a los nodos 2 y 3. En cuanto a las ecuaciones, al tener todos los nodos una fuente de tensión conectada, se reducen a la suma de las KCL aplicadas en los terminales de la fuente de valor $V_{g2}$. En el supuesto de que se defina $V_2$ como variable generadora estas ecuaciones son

$$Y_b(V_2 - V_{g1}) + Y_d V_2 = -I_f$$
$$Y_e(V_2 + V_{g2}) = I_g + I_f$$

cuya suma es

$$Y_b(V_2 - V_{g1}) + Y_d V_2 + Y_e(V_2 + V_{g2}) = I_g$$

Reordenando términos se obtiene

$$(Y_b + Y_d + Y_e)V_2 = I_g + Y_b V_{g1} - Y_e V_{g2}$$

de donde

$$V_2 = \frac{1}{Y_b + Y_d + Y_e}(I_g + Y_b V_{g1} - Y_e V_{g2})$$

resultado que coincide con el obtenido por la aplicación del método de movilidad de generadores.

Como se ha visto en el ejemplo 2.4, las tensiones e intensidades de rama se pueden obtener a partir de $V_2$, lo que confirma su carácter generador.

Se han presentado dos métodos para el análisis nodal de circuitos con generadores de tensión. El primero de ellos, basado en la transformación de fuentes, exige un cambio en la estructura del circuito, mientras que el segundo, que se fundamenta en el Método Nodal, no permite la formulación de las ecuaciones por inspección.

Estas dificultades, que tienen su importancia en el análisis manual y son prácticamente insalvables en el automático, pueden superarse partiendo de un sistema de ecuaciones análogo al obtenido para los circuitos RLCgJ al que deben incorporarse las modificaciones a que obliga la presencia de fuentes de tensión. En la exposición del método se distinguirán dos casos. En el primero de ellos, sin duda el que se presenta con mayor frecuencia, se considerarán circuitos

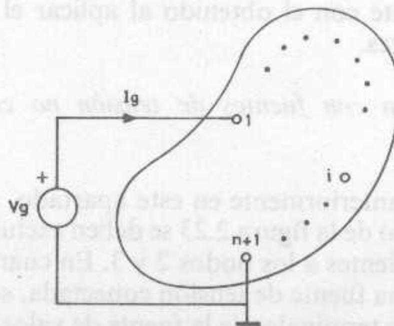



Figura 2.27 Esquema general de un circuito con una fuente de tensión.

excitados con una fuente independiente de tensión conectada al nodo de referencia, siendo el segundo el caso general.

En la figura 2.27 se representa el esquema de un circuito del primer tipo.

Sin que por ello pierda generalidad el método que se describe, se asigna el número de orden 1 al nodo, distinto del de referencia, al que está conectada la fuente de tensión. El primer miembro de las ecuaciones nodales, expresado por el producto $\underline{Y}\underline{V}$, incluye las corrientes que salen de los nodos a través de los elementos definidos por su admitancia o transconductancia. Es por este motivo que la intensidad $I_g$ de la fuente de tensión debe incorporarse al término independiente de la primera ecuación, resultando el sistema

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \dots & Y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_g \\ V_2 \\ \dots \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_g \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

que presenta la particularidad de tener el dato $V_g$ en el vector de variables y la incógnita $I_g$ en el de excitación. Además, la variable $I_g$ aparece únicamente en la primera ecuación, por lo que si ésta se suprime se reduce en una unidad el número de ecuaciones y el de variables, obteniéndose el sistema

$$\begin{bmatrix} Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \dots & Y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_g \\ V_2 \\ \dots \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

del que, transfiriendo los términos en $V_g$ al segundo miembro, resulta

$$\begin{bmatrix} Y_{22} & \dots & Y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ Y_{n2} & \dots & Y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ \dots \\ V_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} Y_{21} \\ \dots \\ Y_{n1} \end{bmatrix} V_g \tag{2.26}$$

sistema que permite la determinación de las tensiones nodales en función de la señal de excitación $V_g$.

El valor de la intensidad $I_g$ puede calcularse sustituyendo las expresiones de las tensiones nodales en la ecuación suprimida.

En conclusión, el sistema de ecuaciones del circuito se obtiene a partir de sus ecuaciones nodales en forma matricial, suprimiendo la primera fila de la matriz $\underline{Y}$ y de los vectores $\underline{V}$ y $\underline{J}$, además de transferir al segundo miembro la primera columna de la matriz resultante multiplicada por el valor de la fuente de tensión $V_g$.

El método descrito es de aplicación al circuito de la figura 2.20. En efecto, las ecuaciones nodales son

$$\begin{bmatrix} g_i+G_1 & -g_i & -G_1 \\ -(\beta+1)g_i & (\beta+1)g_i+G_2 & 0 \\ -G_1+\beta g_i & -\beta g_i & G_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_g \\ V_1 \\ V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sistema del que suprimiendo la primera ecuación, además de transferir al segundo miembro los términos en $V_g$, resulta

$$\begin{bmatrix} (\beta+1)g_i+G_2 & 0 \\ -\beta g_i & G_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\beta+1)g_i \\ G_1-\beta g_i \end{bmatrix} V_g$$

que coincide con el que se obtuvo al aplicar los métodos anteriores.

Algo más complejo resulta el caso general representado en la figura 2.26 que incluye fuentes de tensión no conectadas al nodo de referencia. Las ecuaciones nodales del circuito son

$$\begin{bmatrix} Y_{11} \dots Y_{1i} \dots Y_{1j} \dots Y_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Y_{i1} \dots Y_{ii} \dots Y_{ij} \dots Y_{in} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Y_{j1} \dots Y_{ji} \dots Y_{jj} \dots Y_{jn} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Y_{n1} \dots Y_{ni} \dots Y_{nj} \dots Y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{g1} \\ \dots \\ V_i \\ \dots \\ V_i-V_{g2} \\ \dots \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{g1} \\ \dots \\ I_{g2} \\ \dots \\ -I_{g2} \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

Suprimiendo las filas 1 y $j$ y sustituyendo la $i$ por su suma con la $j$, se eliminan las variables $I_{g1}$ e $I_{g2}$, resultando el sistema de $(n-2)$ ecuaciones

$$\begin{bmatrix} Y_{21} & \dots & Y_{2i} & \dots & Y_{2j} & \dots & Y_{2n} \\ \dots & & & & & & \dots \\ Y_{i1}+Y_{j1} & \dots & Y_{ii}+Y_{ji} & \dots & Y_{ij}+Y_{jj} & \dots & Y_{in}+Y_{jn} \\ \dots & & & & & & \dots \\ Y_{j-1\,1} & \dots & Y_{j-1\,i} & \dots & Y_{j-1\,j} & \dots & Y_{j-1\,n} \\ Y_{j+1\,1} & \dots & Y_{j+1\,i} & \dots & Y_{j+1\,j} & \dots & Y_{j+1\,n} \\ \dots & & & & & & \dots \\ Y_{n1} & \dots & Y_{ni} & \dots & Y_{nj} & \dots & Y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{g1} \\ \dots \\ V_i \\ \dots \\ V_i-V_{g2} \\ \dots \\ \dots \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

Al igual que en el caso anterior los términos en $V_{g1}$ y $V_{g2}$ deben transferirse al segundo miembro, además de sumar los dos coeficientes de $V_i$ en cada una de

las ecuaciones. El resultado de estas transformaciones es el sistema de $(n-2)$ ecuaciones y $(n-2)$ variables expresado por

$$\begin{bmatrix} Y_{22} & \cdots & Y_{2i}+Y_{2j} & \cdots & Y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Y_{i2}+Y_{j2} & \cdots & Y_{ii}+Y_{ji}+Y_{ij}+Y_{jj} & \cdots & Y_{in}+Y_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Y_{j-1\,2} & \cdots & Y_{j-1\,i}+Y_{j-1\,j} & \cdots & Y_{j-1\,n} \\ Y_{j+1\,2} & \cdots & Y_{j+1\,i}+Y_{j+1\,j} & \cdots & Y_{j+1\,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Y_{n2} & \cdots & Y_{ni}+Y_{nj} & \cdots & Y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ \cdots \\ V_i \\ \cdots \\ V_n \end{bmatrix} =$$

$$= - \begin{bmatrix} Y_{21} \\ \cdots \\ Y_{i1}+Y_{j1} \\ \cdots \\ Y_{j-1\,1} \\ Y_{j+1\,1} \\ \cdots \\ Y_{n1} \end{bmatrix} V_{g1} + \begin{bmatrix} Y_{2j} \\ \cdots \\ Y_{ij}+Y_{jj} \\ \cdots \\ Y_{j-1\,j} \\ Y_{j+1\,j} \\ \cdots \\ Y_{nj} \end{bmatrix} V_{g2} \qquad (2.29)$$

del que pueden obtenerse las variables generadoras en función de las excitaciones.

En caso de que se requieran sus valores, las intensidades en las fuentes de tensión pueden determinarse sustituyendo las tensiones nodales en las ecuaciones del sistema (2.27) que incluyen estas variables.

El interés del método descrito reside en que las ecuaciones de un circuito con fuentes de tensión se obtienen por sencillas transformaciones del sistema de ecuaciones nodales que puede plantearse por inspección. Además, el algoritmo es fácilmente implementable en ordenador.

*Ejemplo 2.7 Circuito con fuentes de tensión no conectadas al nodo de referencia.*

Se trata de aplicar el método expuesto al circuito en la figura 2.23 en el que existen fuentes de tensión no conectadas al nodo de referencia.

Las ecuaciones nodales son

$$\begin{bmatrix} Y_b & -Y_b & 0 \\ -Y_b & Y_b+Y_d & 0 \\ 0 & 0 & Y_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{g1} \\ V_2 \\ V_2+V_{g2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_a-I_g \\ -I_f \\ I_f+I_g \end{bmatrix}$$

Suprimiendo la primera ecuación y sustituyendo la segunda por su suma con la tercera además de prescindir de esta última, se eliminan las corrientes $I_a$ e $I_f$ en las fuentes de tensión, resultando

$$[-Y_b \; Y_b+Y_d \; Y_e] \begin{bmatrix} V_{g1} \\ V_2 \\ V_2+V_{g2} \end{bmatrix} = [I_g]$$

ecuación que, después de transferir los términos en $V_{g1}$ y $V_{g2}$ al segundo miembro y sumar los coeficientes de $V_2$, se transforma en

$$(Y_b+Y_d+Y_e)\,V_2 = I_g + Y_b V_{g1} - Y_e V_{g2}$$

de la que puede obtenerse $V_2$ como

$$V_2 = \frac{1}{Y_b+Y_d+Y_e}\,(I_g + Y_b V_{g1} - Y_e V_{g2})$$

resultado que coincide con el calculado anteriormente.

*B. El Método Nodal en el análisis de circuitos con amplificadores operacionales*

En este apartado se presenta el Método Nodal con las modificaciones necesarias para adaptarlo al análisis de circuitos con amplificadores operacionales. Los resultados obtenidos configuran un método de gran eficacia tanto en el análisis manual como en el automático.

Para el amplificador operacional se utilizará el modelo ideal, que se caracteriza por el valor infinito de su amplificación, lo que implica que se forme un cortocircuito virtual entre los nodos a los que están conectadas sus entradas inversora y no inversora.

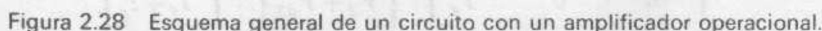


Figura 2.28 Esquema general de un circuito con un amplificador operacional.

La exposición del método se hará primero para circuitos con un solo amplificador operacional y se generalizará posteriormente a circuitos que incluyen varios de ellos.

En la figura 2.28 se representa el esquema general de un circuito con un amplificador operacional.

La corriente de salida $I_s$ no incide en el nodo $k$ a través de una admitancia o de una transconductancia, por lo que debe incluirse en el vector de términos independientes, de forma que las ecuaciones nodales del circuito son

$$\begin{bmatrix} Y_{11} \dots Y_{1i} \dots Y_{1j} \dots Y_{1k} \dots Y_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Y_{i1} \dots Y_{ii} \dots Y_{ij} \dots Y_{ik} \dots Y_{in} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Y_{j1} \dots Y_{ji} \dots Y_{jj} \dots Y_{jk} \dots Y_{jn} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Y_{k1} \dots Y_{ki} \dots Y_{kj} \dots Y_{kk} \dots Y_{kn} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Y_{n1} \dots Y_{ni} \dots Y_{nj} \dots Y_{nk} \dots Y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ \dots \\ V_i \\ \dots \\ V_j \\ \dots \\ V_k \\ \dots \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ I_s \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

En este sistema las $(n+1)$ incógnitas son las $n$ tensiones nodales y la corriente de salida del amplificador operacional. Su número supera en una unidad al de ecuaciones, lo que indica que no se han incorporado todas las relaciones constitutivas de los elementos. En efecto, falta considerar que el cortocircuito virtual entre las entradas del amplificador operacional impone la condición $V_i = V_j$, igualdad que se refleja en el sistema de ecuaciones sumando en cada una de ellas los coeficientes de estas variables o, lo que es equivalente, en la sustitución de la columna $i$ por su suma con la $j$ y en la supresión de esta última y de la variable $V_j$. Por otra parte, la incógnita $I_s$ aparece únicamente en la ecuación del nodo $k$, por lo que puede eliminarse del sistema suprimiendo la fila $k$ de su matriz y del vector excitación.

Con estas transformaciones resulta el sistema

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & \dots & Y_{1i}+Y_{1j} & \dots & Y_{1k} & \dots & Y_{1n} \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ Y_{i1} & \dots & Y_{ii}+Y_{ij} & \dots & Y_{ik} & \dots & Y_{in} \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ Y_{j1} & \dots & Y_{ji}+Y_{jj} & \dots & Y_{jk} & \dots & Y_{jn} \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ Y_{k-1\,1} & \dots & Y_{k-1\,i}+Y_{k-1\,j} & \dots & Y_{k-1\,k} & \dots & Y_{k-1\,n} \\ Y_{k+1\,1} & \dots & Y_{k+1\,i}+Y_{k+1\,j} & \dots & Y_{k+1\,k} & \dots & Y_{k+1\,n} \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ Y_{n1} & \dots & Y_{ni}+Y_{nj} & \dots & Y_{nk} & \dots & Y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ \dots \\ V_i \\ \dots \\ V_k \\ \dots \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

del que pueden obtenerse las $n$ tensiones nodales del circuito.

La corriente de salida $I_s$ puede determinarse sustituyendo los valores de estas tensiones en la ecuación KCL del nodo $k$, antes suprimida.

Es interesante destacar que si el circuito se modifica conectando un elemento entre el nodo de salida del amplificador operacional y el de referencia, su admitancia sólo aparece en la fila $k$ de la matriz del sistema, concretamente en el término $Y_{kk}$. Como se ha explicado anteriormente, en la aplicación del método esta fila se suprime, por lo que el elemento incorporado no afecta a los valores de las tensiones nodales del circuito, haciendo variar únicamente el valor de $I_s$. Este resultado confirma que la salida de un amplificador operacional se comporta como una fuente controlada de tensión.

Para el caso particular en que una de las entradas del amplificador operacional esté conectada al nodo de referencia, tal como se representa en la figura 2.29, obviamente no se debe plantear la ecuación KCL correspondiente a dicha entrada. La supresión de la fila $k$, en la matriz del sistema y en el vector de términos independientes, produce la eliminación de la corriente de salida $I_s$, mientras que la de la columna $i$ y la de la variable $V_i$ se justifica por cumplirse que $V_i=0$. Con estas transformaciones las ecuaciones del circuito son

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & \cdots & Y_{1\,i-1} & \cdots & Y_{1\,i+1} & \cdots & Y_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Y_{k-1\,1} & \cdots & Y_{k-1\,i-1} & \cdots & Y_{k-1\,i+1} & \cdots & Y_{k-1\,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Y_{k+1\,1} & \cdots & Y_{k+1\,i-1} & \cdots & Y_{k+1\,i+1} & \cdots & Y_{k+1\,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Y_{n1} & \cdots & Y_{n\,i-1} & \cdots & Y_{n\,i+1} & \cdots & Y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ \cdots \\ V_{i-1} \\ \cdots \\ V_{i+1} \\ \cdots \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 \\ \cdots \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (2.32)$$

sistema del que pueden obtenerse las tensiones nodales del circuito en función de la excitación.

Como en el caso anterior, la sustitución de estos valores en la ecuación suprimida permite la determinación de la corriente de salida $I_s$.

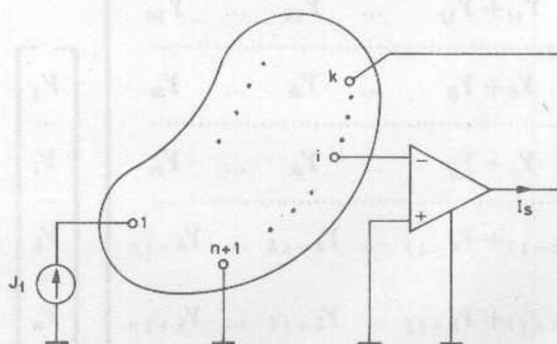



Figura 2.29 Amplificador operacional con una entrada conectada al nodo de referencia.

En conclusión, el Método Nodal adaptado al análisis de circuitos con un amplificador operacional puede resumirse en los siguientes pasos:

1. Formulación de las ecuaciones nodales del circuito incluyendo la corriente de salida del amplificador operacional
2. Supresión en la matriz de admitancia nodal $\underline{Y}$ y en el vector de términos independientes $\underline{J}$ de la fila correspondiente al nodo de salida del amplificador operacional.
3. Si las entradas del amplificador operacional están conectadas a los nodos $i$ y $j$, respectivamente, sustitución en la matriz $\underline{Y}$ de la columna $i$ por su suma con la $j$ y supresión de esta última y de la variable $V_j$ del vector $\underline{V}_n$.

   En caso de que las entradas del amplificador operacional estén conectadas al nodo $i$ y al de referencia, respectivamente, supresión de la columna $i$ de la matriz $\underline{Y}$ y de la variable $V_i$ del vector $\underline{V}_n$.
4. Resolución del sistema obtenido para la determinación de las tensiones nodales.

Si la excitación del circuito es una fuente independiente de tensión, se aplican al sistema de ecuaciones nodales las transformaciones descritas en la sección A de este apartado.

El método es de aplicación inmediata a circuitos con varios amplificadores operacionales sin más que repetir para cada uno de estos dispositivos los pasos descritos. En caso de que varios terminales de entrada estén conectados a un mismo nodo, las modificaciones en el sistema deben hacerse atendiendo a las relaciones que imponen los distintos cortocircuitos virtuales. En el ejemplo 2.10 se analizará un circuito que incluye dos amplificadores operacionales con las entradas inversoras conectadas a un mismo nodo.

El método descrito, al basarse en sencillas modificaciones en las ecuaciones nodales del circuito, puede traducirse a un algoritmo fácilmente implementable en ordenador.

Por otra parte, se observa que si en un circuito se permutan los nodos a los que están conectadas las entradas de uno o varios de los amplificadores operacionales los resultados obtenidos son idénticos. Muy al contrario, con este cambio un circuito puede convertirse en inestable, saturándose estos dispositivos independientemente de la amplitud de la señal de entrada. Este comportamiento, cuya justificación exige un modelo más complejo que el ideal, determina que sólo tenga sentido aplicar el método descrito a circuitos de los que previamente se conoce su estabilidad. Estos interesantes aspectos se tratarán con mayor profundidad en el apartado 2.4.

Además, como el sistema de ecuaciones del circuito no incluye las correspondientes a los nodos de salida de los amplificadores operacionales, estos terminales pueden permutarse, conectando a uno de ellos todos los elementos que estaban conectados a otro y viceversa (relocation), sin que varíen los resultados que se obtienen utilizando el modelo ideal. Esta propiedad ha sido hábilmente aplicada para modificar estructuras ya clásicas de filtros activos generando otras distintas con aspectos de su funcionamiento notablemente superiores.

*Ejemplo 2.8 Realización de una fuente de corriente controlada por tensión.*

En este ejemplo se trata de determinar para el circuito de la figura 2.30 la relación entre la tensión $V_L$ en la impedancia de carga $Z_L$ y la excitación $V_g$. Del análisis del resultado se obtendrá la condición de diseño para que el circuito se comporte como una fuente de corriente controlada por la tensión $V_g$.

Transformando el generador de entrada en una fuente de corriente resulta el circuito de la figura 2.31, que presenta una estructura idónea para la aplicación directa del Método Nodal.

Las ecuaciones del circuito son

$$\begin{bmatrix} G_1+G_2 & -G_2 & 0 \\ -G_2 & G_2+G_3 & -G_3 \\ 0 & -G_3 & G_3+G_4+Y_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 V_g \\ I_s \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al suprimir la segunda ecuación se elimina la variable $I_s$. Además, al ser $V_1 = V_L$, los coeficientes de estas variables pueden sumarse, lo que permite la

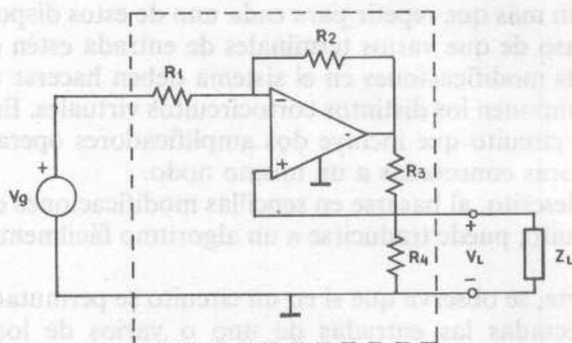



Figura 2.30 Circuito del ejemplo 2.8.

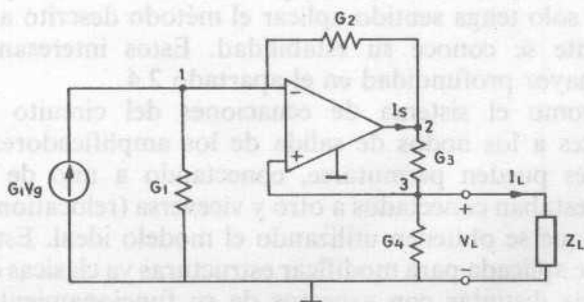



Figura 2.31 Circuito equivalente excitado con fuente de corriente.

sustitución de la tercera columna de $Y$ por su suma con la primera, así como la supresión de ésta y de la variable $\tilde{V}_1$. De estas transformaciones resulta el sistema

$$\begin{bmatrix} -G_2 & G_1+G_2 \\ -G_3 & G_3+G_4+Y_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ V_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} V_g$$

del que se obtiene

$$V_L = \frac{-G_1 G_3}{(G_2 G_4 - G_1 G_3) + G_2 Y_L} V_g = -\frac{R_2 R_4}{(R_1 R_3 - R_2 R_4) Z_L + R_1 R_3 R_4} Z_L V_g$$

$$I_L = \frac{V_L}{Z_L} = -\frac{R_2 R_4}{(R_1 R_3 - R_2 R_4) Z_L + R_1 R_3 R_4} V_g$$

Si se diseña el circuito de forma que se cumpla la relación

$$R_1 R_3 = R_2 R_4$$

la intensidad de la corriente $I_L$ vendrá dada por

$$I_L = -\frac{R_2}{R_1 R_3} V_g = -\frac{1}{R_4} V_g$$

que es independiente de $Z_L$. Esta propiedad determina que el circuito, con la condición de diseño $R_1 R_3 = R_2 R_4$ y completado con un seguidor de tensión, tal

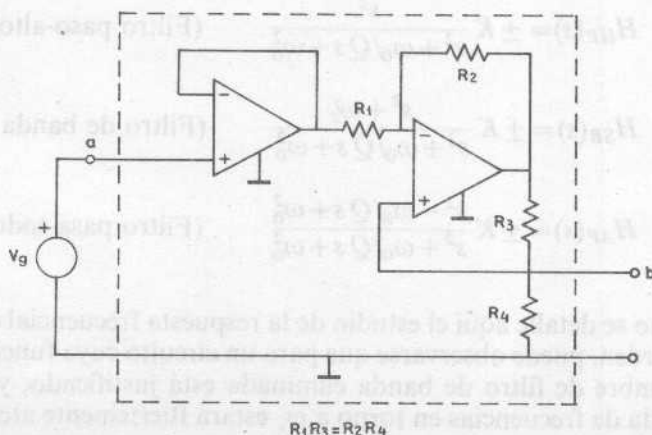



Figura 2.32 Realización de un fuente de corriente controlada por tensión.

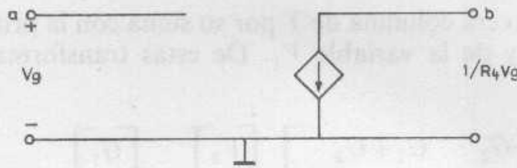



Figura 2.33 Fuente de corriente controlada por tensión. VCT.

como se muestra en la figura 2.32, sea una realización de la fuente de corriente controlada por tensión de la figura 2.33.

*Ejemplo 2.9 Filtro de banda eliminada de segundo orden.*

Las células bicuadráticas forman un conjunto de circuitos activos RC con amplificadores operacionales en los que la función de red, en el caso general, viene dada por el cociente de dos polinomios de segundo grado en la variable $s$, según la expresión

$$H(s) = \pm K \frac{s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

siendo los casos particulares de mayor interés

$$H_{LP}(s) = \pm K \frac{\omega_0^2}{s^2 + \omega_0/Q\, s + \omega_0^2} \qquad \text{(Filtro paso-bajo)}$$

$$H_{BP}(s) = \pm K \frac{s}{s^2 + \omega_0/Q\, s + \omega_0^2} \qquad \text{(Filtro paso-banda)}$$

$$H_{HP}(s) = \pm K \frac{s^2}{s^2 + \omega_0/Q\, s + \omega_0^2} \qquad \text{(Filtro paso-alto)}$$

$$H_{SB}(s) = \pm K \frac{s^2 + \omega_Z^2}{s^2 + \omega_0/Q\, s + \omega_0^2} \qquad \text{(Filtro de banda eliminada)}$$

$$H_{AP}(s) = \pm K \frac{s^2 - \omega_0/Q\, s + \omega_0^2}{s^2 + \omega_0/Q\, s + \omega_0^2} \qquad \text{(Filtro pasa-todo)}$$

Aunque no se detalle aquí el estudio de la respuesta frecuencial de los filtros de segundo orden, puede observarse que para un circuito cuya función de red es $H_{SB}(s)$ el nombre de filtro de banda eliminada está justificado, ya que en su salida la banda de frecuencias en torno a $\omega_z$ estará fuertemente atenuada al ser $|H(j\omega_z)| = 0$.

Estas células que por sí mismas son filtros de segundo orden, se utilizan en la

realización de filtros de orden superior por conexión en cascada. En efecto, el puerto de salida de un amplificador operacional se puede modelar como una fuente controlada de tensión, por lo que la función de red del circuito, resultante de conectar en cascada células cuya salida es la de uno de estos dispositivos, es igual al producto de las funciones de red de las células que incluye. Por esta razón, los polos y ceros de cada una de ellas pasan a serlo, sin alteración, del circuito completo. Es fácil comprender que en esta propiedad se fundamenta una de las líneas de diseño de filtros activos de orden superior a dos, cuyas especificaciones frecuenciales se hayan traducido previamente a una configuración de polos y ceros adecuada.

En la figura 2.34 se representa un circuito que, bajo ciertas condiciones de diseño, se comporta como un filtro de banda eliminada. Se trata de calcular la función de red $H(s)=V_0(s)/V_{IN}(s)$, como paso previo a la determinación de la relación que deben cumplir los valores de los elementos para que el circuito tenga esta característica frecuencial.

Las ecuaciones nodales del circuito son

$$\begin{bmatrix} G_1+G_4+G_5 & -G_1 & 0 & -G_4 & 0 & -G_5 & 0 \\ -G_1 & G_1+G_2+G_3+C_1s & -(C_1s+G_2) & 0 & 0 & 0 & -G_3 \\ 0 & -(C_1s+G_2) & G_2+G_7+C_1s & -G_7 & 0 & 0 & 0 \\ -G_4 & 0 & -G_7 & 2G_7+G_4 & -G_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -G_7 & G_6+G_7 & -G_6 & 0 \\ -G_5 & 0 & 0 & 0 & -G_6 & G_5+G_6+C_2s & -C_2s \\ 0 & -G_3 & 0 & 0 & 0 & -C_2s & G_3+C_2s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{IN} \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_0 \\ V_6 \\ V_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_s \\ 0 \\ I_{s1} \\ 0 \\ I_{s2} \\ 0 \\ I_{s3} \end{bmatrix}$$

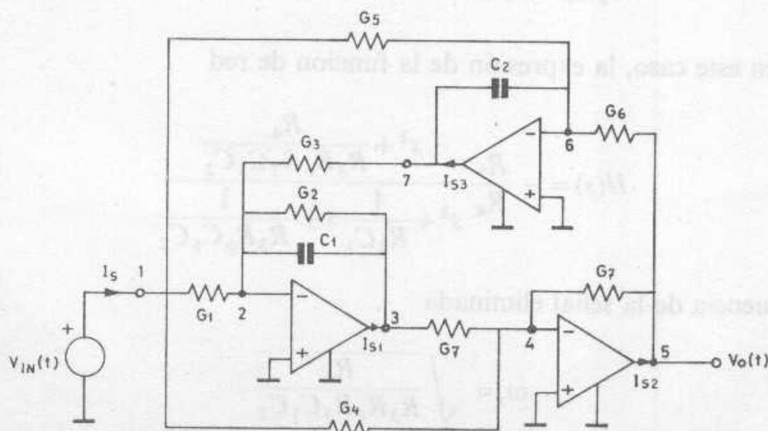



Figura 2.34 Filtro de banda eliminada.

Siguiendo el método descrito para los circuitos excitados con una fuente independiente de tensión, se suprimirá la primera fila de la matriz $Y$, la variable $V_{IN}$ del vector $V_n$ y se transferirá la primera columna multiplicada por $V_{IN}$ al segundo miembro.

Además, se prescindirá de las filas tercera, quinta y séptima, correspondientes a las ecuaciones KCL de los nodos de salida de los amplificadores operacionales, disminuyendo así en tres el número de ecuaciones y de incógnitas. Por último, el cortocircuito virtual en cada amplificador operacional impone la condición: $V_2=V_4=V_6=0$, por lo que pueden suprimirse estas variables, además de las columnas segunda, cuarta y sexta. Aplicando estas transformaciones, resulta el sistema

$$\begin{bmatrix} -(G_2+C_1s) & 0 & -G_3 \\ -G_7 & -G_7 & 0 \\ 0 & -G_6 & -C_2s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_3 \\ V_0 \\ V_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_4 \\ G_5 \end{bmatrix} V_{IN}$$

de cuya solución se obtiene

$$H(s)=\frac{V_0(s)}{V_{IN}(s)}=-\frac{G_4C_1C_2s^2+C_2(G_2G_4-G_1G_7)s+G_3G_5G_7}{G_7(C_1C_2s^2+G_2C_2s+G_3G_6)}$$

Para que esta función de red sea del tipo banda eliminada, cuya forma general es

$$H(s)=\pm K\frac{s^2+\omega_z^2}{s^2+\omega_p/Q\,s+\omega_p^2}$$

tiene que cumplirse la condición

$$G_2G_4-G_1G_7=0 \quad \equiv \quad R_2R_4=R_1R_7$$

siendo, en este caso, la expresión de la función de red

$$H(s)=-\frac{R_7}{R_4}\frac{s^2+\dfrac{R_4}{R_3R_5R_7C_1C_2}}{s^2+\dfrac{1}{R_2C_1}s+\dfrac{1}{R_3R_6C_1C_2}}$$

y la frecuencia de la señal eliminada

$$\omega_z=\sqrt{\frac{R_4}{R_3R_5R_7C_1C_2}}$$

quedando fuertemente atenuada la banda de frecuencias en torno a $\omega_z$.

Aunque existen circuitos más sencillos que también tienen una función de red del tipo banda eliminada, el que se ha presentado en este ejemplo tiene la ventaja de que cada uno de los parámetros $\omega_z$, $Q$, $\omega_p$ y $K$ puede ajustarse independientemente variando el valor de uno de los elementos. En efecto, $R_2$ influye únicamente sobre $Q$, $R_5$ sobre $\omega_z$ y $R_6$ sobre $\omega_p$, pudiéndose obtener distintos valores de $K$ variando $R_4$. Esta posibilidad de ajustar por separado cada uno de los parámetros que determinan la respuesta frecuencial de un circuito tiene gran interés en el diseño de filtros, ya que facilita su sintonización en aplicaciones en las que se requiere una precisión elevada.

*Ejemplo 2.10 Conversor generalizado de inmitancias (GIC).*

Este ejemplo consiste en la determinación de la impedancia de entrada, vista desde los terminales a-b en el circuito de la figura 2.35 del que, para distintos valores de las impedancias de rama, se derivan circuitos para la simulación de inductores con uno de sus terminales conectado a masa y para la realización de un elemento llamado FDNR (Frequency-Dependent Negative Resistance).

La impedancia de entrada del circuito se define por la expresión

$$Z_{IN}(s) = \frac{V_1(s)}{I_g(s)}$$

Para su cálculo se parte del sistema de ecuaciones nodales

$$\begin{bmatrix} Y_1 & -Y_1 & 0 & 0 & 0 \\ -Y_1 & Y_1+Y_2 & -Y_2 & 0 & 0 \\ 0 & -Y_2 & Y_2+Y_3 & -Y_3 & 0 \\ 0 & 0 & -Y_3 & Y_3+Y_4 & -Y_4 \\ 0 & 0 & 0 & -Y_4 & Y_4+Y_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_g \\ I_{S1} \\ 0 \\ I_{S2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

de cuya matriz pueden suprimirse las filas segunda y cuarta, con lo que se eliminan las variables $I_{S1}$ e $I_{S2}$. Por otra parte, al ser iguales las tensiones de los terminales de entrada de los amplificadores operacionales, se cumple que

$$V_1 = V_3 = V_5$$

lo que justifica la sustitución de la primera columna por su suma con la tercera y quinta, así como la supresión de estas dos últimas y de las variables $V_3$ y $V_5$, resultando el sistema

$$\begin{bmatrix} Y_1 & -Y_1 & 0 \\ Y_2+Y_3 & -Y_2 & -Y_3 \\ Y_4+Y_5 & 0 & -Y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

del que se obtiene

$$Z_{IN}(s) = \frac{V_1(s)}{I_g(s)} = \frac{Z_1 Z_3 Z_5}{Z_2 Z_4}$$

Al circuito de la figura 2.35 se le llama Conversor Generalizado de Inmitancias (GIC), ya que según los valores de $Z_1$, $Z_2$, $Z_3$, $Z_4$ y $Z_5$, la impedancia de entrada corresponde a distintos tipos de elementos.

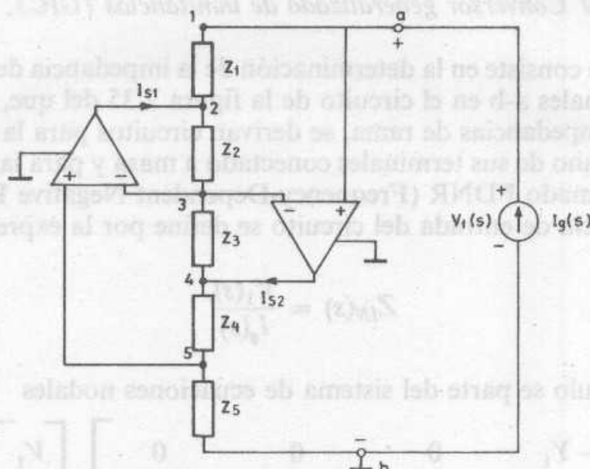



Figura 2.35 Conversor Generalizado de Inmitancias. GIC.

Un caso particularmente interesante es la simulación de inductores puestos a masa, que se consigue al hacer que $Z_1$, $Z_3$, $Z_4$ y $Z_5$ sean resistores y $Z_2$ un condensador. De esta forma, los valores de las distintas impedancias serán

$$Z_1 = R_1 \quad ; \quad Z_2 = 1/C_2 s \quad ; \quad Z_3 = R_3 \quad ; \quad Z_4 = R_4 \quad ; \quad Z_5 = R_5$$

a los que corresponde una impedancia de entrada dada por la expresión

$$Z_{IN}(s) = \frac{R_1 R_3 R_5}{R_4} C_2 s$$

que coincide con la de un inductor de valor

$$L = \frac{R_1 R_3 R_5}{R_4} C_2$$

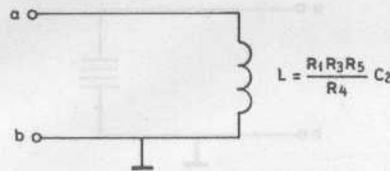



Figura 2.36 Inductor simulado.

En estas condiciones, el circuito de la figura 2.35 es equivalente al inductor puesto a masa de la figura 2.36.

Este resultado admite la siguiente interpretación: Si en el circuito de la figura 2.35 se suprimen la fuente independiente $I_g$ y la impedancia $Z_2$, resulta el bipuerto, representado en la figura 2.37, llamado Inversor Positivo de Impedancia, cuyo nombre se justifica al ser la impedancia de entrada $Z_{IN}(s)$, con el puerto de salida cargado con $Z_L(s)$

$$Z_{IN}(s) = \frac{R_1 R_3 R_5}{R_4} \frac{1}{Z_L(s)} = \frac{R_1 R_3 R_5}{R_4} Y_L(s)$$

proporcional a la inversa de $Z_L(s)$ y de signo positivo.

Por otra parte, si en el circuito de la figura 2.35 se dan a las distintas impedancias los valores

$$Z_1 = R_1 \quad ; \quad Z_2 = 1/C_2 s \quad ; \quad Z_3 = R_3 \quad ; \quad Z_4 = 1/C_4 s \quad ; \quad Z_5 = R_5$$

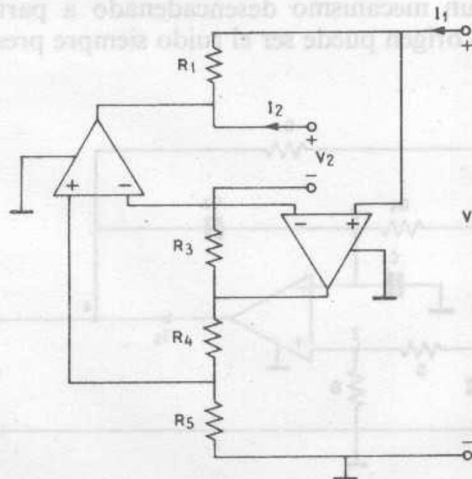



Figura 2.37 Inversor Positivo de Impedancia.

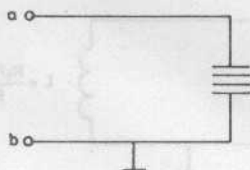



Figura 2.38 Símbolo del FDNR.

la impedancia de entrada será

$$Z_{IN}(s)=R_1R_3R_5C_2C_4s^2=Ks^2 \quad ; \quad K=R_1R_3R_5C_2C_4$$

que corresponde a un elemento al que se denomina FDNR (Frequency-Dependent Negative Resistance), cuyo símbolo se representa en la figura 2.38.

El motivo de esta denominación es que si el FDNR se excita con una señal senoidal de frecuencia $\omega$, su impedancia en régimen permanente viene dada por

$$Z(j\omega)=-K\omega^2$$

lo que explica su comportamiento como una resistencia negativa de valor absoluto proporcional al cuadrado de la frecuencia. El FDNR se utiliza como elemento básico en algunos métodos de diseño de filtros activos con amplificadores operacionales.

*Ejemplo 2.11 Oscilador RC.*

En este ejemplo se trata de estudiar si el circuito de la figura 2.39 puede comportarse como un oscilador, es decir, si es capaz de generar una senoide no amortiguada según un mecanismo desencadenado a partir de un pequeño estímulo inicial, cuyo origen puede ser el ruido siempre presente en el circuito.

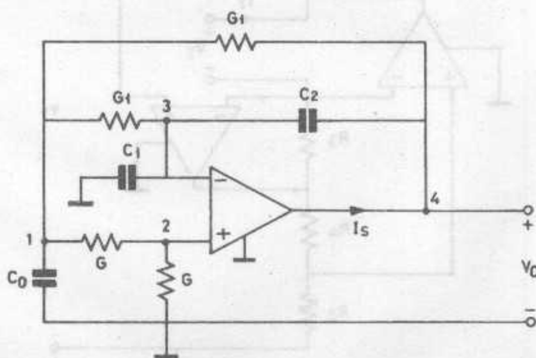



Figura 2.39 Oscilador RC.

Para ello bastará que en su respuesta libre exista una componente de estas características, lo que ocurre si la función de red, definida para una excitación cuyo generador que la modela no modifica la estructura del circuito, tiene dos polos imaginarios conjugados.

Para el circuito representado en la figura 2.39 una fuente de corriente de valor $I$ conectada entre el nodo 1 y el de referencia no modifica su estructura, ya que al ser desactivada el circuito recupera su forma inicial. Con la inclusión de la excitación así definida el sistema de ecuaciones nodales es

$$\begin{bmatrix} C_0s+2G_1+G & -G & -G_1 & -G_1 \\ -G & 2G & 0 & 0 \\ -G_1 & 0 & (C_1+C_2)s+G_1 & -C_2s \\ -G_1 & 0 & -C_2s & C_2s+G_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ I_s \end{bmatrix}$$

que después de aplicar las transformaciones que impone la presencia del amplificador operacional, se convierte en

$$\begin{bmatrix} C_0s+2G_1+G & -(G+G_1) & -G_1 \\ -G & 2G & 0 \\ -G_1 & (C_1+C_2)s+G_1 & -C_2s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El denominador de la función de red

$$H(s) = \frac{V_0(s)}{I(s)}$$

es igual al determinante de la matriz del sistema y tiene como expresión

$$D(s) = -G\,[2C_2C_0s^2 + (2G_1C_2 + GC_2 - G_1C_1)s + G_1^2]$$

Para que este polinomio tenga dos raíces imaginarias conjugadas ($\pm j\omega_0$), lo que determina el comportamiento del circuito como un oscilador de frecuencia $\omega_0$, debe cumplirse la condición

$$2G_1C_2 + GC_2 - G_1C_1 = 0$$

equivalente a

$$\frac{C_1}{C_2} = 2 + \frac{G}{G_1} = 2 + \frac{R_1}{R}$$

La frecuencia de oscilación en este caso será

$$\omega_0 = \frac{G_1}{\sqrt{2C_2C_0}} = \frac{1}{R_1\sqrt{2C_2C_0}}$$

ajustable variando $C_0$, sin que por ello deje de comportarse como un oscilador.

En realidad, conseguir que se cumpla exactamente la condición de oscilación no tiene sentido práctico. Por ello, en el diseño de osciladores se busca la inestabilidad inicial del circuito, asegurando así que al principio se produzca una oscilación de amplitud creciente que se estabiliza después de forma automática por un mecanismo no lineal que actúa en todos los dispositivos electrónicos cuando se superan determinados márgenes. En el caso descrito y para bajas frecuencias este mecanismo es el de saturación.

Atendiendo a estas consideraciones, el oscilador que se ha presentado en este ejemplo se diseña con

$$\frac{C_1}{C_2} > 2 + \frac{R_1}{R}$$

### 2.2.5 Otras aplicaciones del Método Nodal. Cálculo de corrientes de cortocircuito

La determinación de corrientes de cortocircuito, aun teniendo un carácter más bien teórico, es de interés en la obtención de los equivalentes de Thevenin y Norton de un circuito y en el cálculo de algunos de los parámetros de bipuertos.

En este apartado se trata de la adaptación del Método Nodal a la determinación de dichas corrientes.

En la figura 2.40 se representa el esquema general de un circuito excitado con una fuente de corriente y con dos nodos cortocircuitados. Una forma de determinar la variable $I_{CC}$ consiste en aplicar el Método Nodal considerando a $j$ y $k$ como un solo nodo y calcular, después, la corriente de cortocircuito sustituyendo los valores de las tensiones nodales obtenidas en la ecuación KCL de uno de ellos.

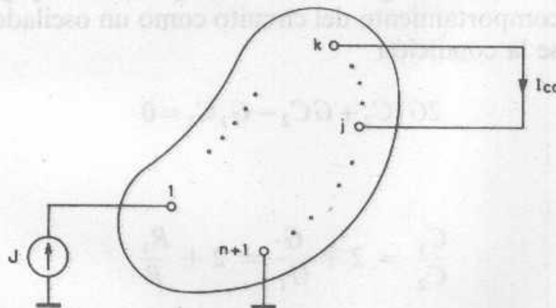



Figura 2.40 Esquema general de un circuito con dos nodos cortocircuitados.

Un método más eficaz que el anterior se basa en considerar por separado los nodos $j$ y $k$, con lo que el sistema de ecuaciones nodales incluye a $I_{CC}$ como variable. La solución de este sistema permite determinar la corriente de cortocircuito sin necesidad de calcular previamente las tensiones de los nodos.

Desarrollando el método, las ecuaciones nodales para el circuito de la figura 2.40 son

$$\begin{bmatrix} Y_{11} \dots Y_{1j} \dots Y_{1k} \dots Y_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Y_{j1} \dots Y_{jj} \dots Y_{jk} \dots Y_{jn} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Y_{k1} \dots Y_{kj} \dots Y_{kk} \dots Y_{kn} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Y_{n1} \dots Y_{nj} \dots Y_{nk} \dots Y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ \dots \\ V_j \\ \dots \\ V_k \\ \dots \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \\ \dots \\ I_{CC} \\ \dots \\ -I_{CC} \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

El cortocircuito entre los nodos $j$ y $k$ impone la condición $V_j = V_k$, lo que implica que en cada una de las ecuaciones se deban sumar los coeficientes de estas variables, o lo que es equivalente, sustituir en la matriz del sistema la columna $j$ por su suma con la $k$, a la vez que suprimir esta última y la variable $V_k$. Además, al ser $I_{CC}$ una incógnita, los términos en los que interviene deben transferirse al primer miembro de las ecuaciones, con lo que se llega al sistema

$$\begin{bmatrix} Y_{11} \dots Y_{1j} + Y_{1k} \dots Y_{1n} & 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots \\ Y_{j1} \dots Y_{jj} + Y_{jk} \dots Y_{jn} & -1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots \\ Y_{k1} \dots Y_{kj} + Y_{kk} \dots Y_{kn} & 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ Y_{n1} \dots Y_{nj} + Y_{nk} \dots Y_{nn} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ \dots \\ V_j \\ \dots \\ V_n \\ \\ I_{CC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.34}$$

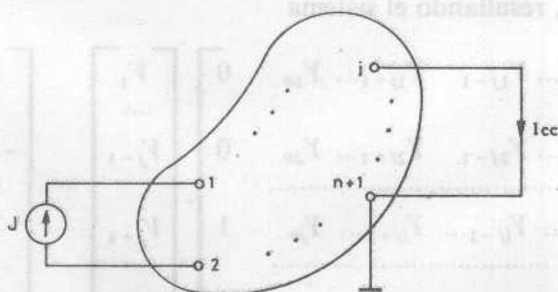



Figura 2.41 Circuito con un nodo cortocircuitado con el de referencia.

del que puede obtenerse directamente la corriente de cortocircuito $I_{CC}$. El método se puede generalizar para el caso de circuitos excitados por una fuente de tensión, aplicando las conclusiones a las que se ha llegado en la sección A del apartado 2.2.4. Además, tiene la propiedad de ser fácilmente implementable en ordenador.

Otra vía para la determinación de la corriente de cortocircuito parte de la elección como nodo de referencia de uno de los cortocircuitados, tal como se representa en la figura 2.41.

En este caso, las ecuaciones nodales son

$$\begin{bmatrix} Y_{11} \ldots Y_{12} \ldots Y_{1j} \ldots Y_{1n} \\ Y_{21} \ldots Y_{22} \ldots Y_{2j} \ldots Y_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_{j1} \ldots Y_{j2} \ldots Y_{jj} \ldots Y_{jn} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_{n1} \ldots Y_{n2} \ldots Y_{nj} \ldots Y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \ldots \\ V_j \\ \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \\ -J \\ \ldots \\ -I_{CC} \\ \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

La existencia de un cortocircuito entre el nodo $j$ y el de referencia determina que la tensión $V_j$ sea nula, cumpliéndose la igualdad

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \ldots & J & \ldots Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} \ldots & -J & \ldots Y_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ Y_{j1} & Y_{j2} \ldots & -I_{CC} & \ldots Y_{jn} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ Y_{n1} & Y_{n2} \ldots & 0 & \ldots Y_{nn} \end{bmatrix} = 0 \tag{2.36}$$

ecuación que permite, de forma inmediata, obtener la relación entre la intensidad de la corriente de cortocircuito $I_{CC}$ y el valor $J$ de la excitación.

Si también se pretende determinar las tensiones nodales, los términos en $I_{CC}$ se deben transferir al primer miembro de (2.35), además de suprimir la columna $j$ y la variable $V_j$, resultando el sistema

$$\begin{bmatrix} Y_{11} \cdots Y_{1j-1} & Y_{1j+1} \cdots Y_{1n} & 0 \\ Y_{21} \cdots Y_{2j-1} & Y_{2j+1} \cdots Y_{2n} & 0 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \\ Y_{j1} \cdots Y_{ij-1} \cdots & Y_{jj+1} \cdots Y_{jn} & 1 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \\ Y_{n1} \cdots Y_{nj-1} \cdots & Y_{nj+1} \cdots Y_{nn} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ \ldots \\ V_{j-1} \\ V_{j+1} \\ \ldots \\ V_n \\ I_{CC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \\ \\ -J \\ \ldots \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.37}$$

del que pueden obtenerse las tensiones nodales y la corriente de cortocircuito.

*Ejemplo 2.12. Determinación de los parámetros híbridos h de la conexión Darlington de dos transistores bipolares.*

Antes de abordar un caso concreto de determinación de parámetros, parece conveniente presentar algunas definiciones y conceptos básicos en el estudio de los bipuertos.

El concepto de bipuerto tiene sentido cuando para una parte del circuito el objetivo del análisis se limita al estudio de las variables definidas en ciertos pares de sus terminales, llamados puertos, y no se pretende la determinación de las tensiones y corrientes en las ramas internas.

Dos terminales constituyen un puerto o acceso si se cumple que la corriente que entra al circuito por uno de ellos es igual a la que sale por el otro. A esta restricción se le llama condición de puerto.

Si el circuito considerado está conectado a otro exterior a través de dos terminales, la condición de puerto se cumple siempre, como se desprende de la aplicación de KCL al corte que éstos determinan. En la figura 2.42*a* se representa un puerto definido por los nodos *a* y *b*.

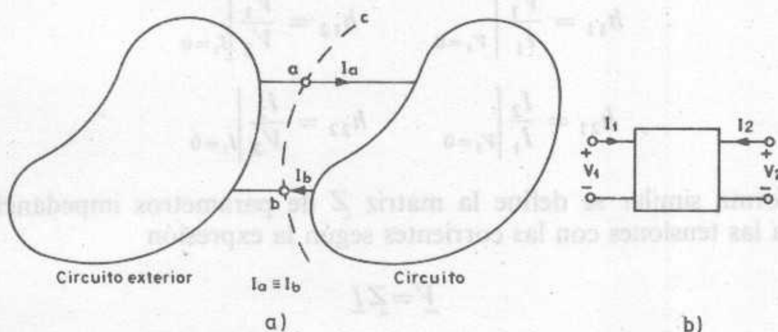



Figura 2.42 *a*) Puerto. *b*) Bipuerto.

Se denomina bipuerto a todo circuito con dos puertos que no incluye fuentes independientes. En la figura 2.42*b* se muestra el esquema general de un bipuerto, con indicación de las tensiones y corrientes que en él se definen. Los dos puertos se distinguen con los nombres de entrada y de salida, asignándoles a sus variables los subíndices 1 y 2 respectivamente.

La linealidad de los elementos y la ausencia de fuentes independientes determina que dos cualesquiera de las variables puedan expresarse como combinación lineal de las dos restantes.

Si se eligen como variables independientes la intensidad de entrada $I_1$ y la tensión de salida $V_2$, las relaciones son de la forma

$$V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2$$

$$I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2$$

donde los cuatro coeficientes definen la matriz $\underset{\sim}{h}$ de parámetros híbridos según

$$\underset{\sim}{h} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$$

pudiendo escribirse las anteriores ecuaciones como

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \underset{\sim}{h} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

El nombre de híbridos deriva del hecho de que dos de ellos, $h_{12}$ y $h_{21}$, son adimensionales, mientras que $h_{11}$ y $h_{22}$ tienen dimensiones de impedancia y admitancia, respectivamente.

En un bipuerto, los parámetros híbridos $h$ pueden obtenerse analizando los circuitos de la figura 2.43 y aplicando las expresiones

$$h_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{V_2=0} \qquad h_{12} = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_1=0}$$

$$h_{21} = \left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{V_2=0} \qquad h_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{I_1=0}$$

De forma similar se define la matriz $\underset{\sim}{Z}$ de parámetros impedancia que relaciona las tensiones con las corrientes según la expresión

$$\underline{V} = \underset{\sim}{Z}\,\underline{I}$$

que puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

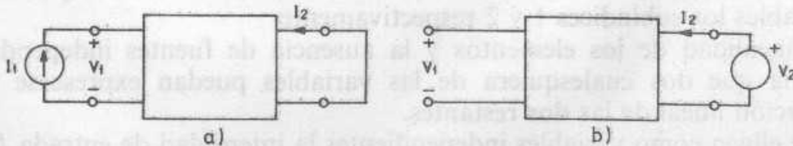



Figura 2.43 Circuitos para la determinación de los parámetros híbridos $h$.

mientras que los parámetros admitancia $Y$ sirven para expresar las corrientes en función de las tensiones, según

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \underline{I} = \underline{Y}\,\underline{V}$$

y los parámetros de transmisión relacionan las variables definidas en el puerto de entrada con las del puerto de salida, según las expresiones

$$V_1 = AV_2 - BI_2$$

$$I_1 = CV_2 - DI_2$$

que pueden escribirse como

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

siendo la matriz de parámetros de transmisión

$$\underline{t} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Es interesante mencionar que en este último caso se considera la variable $(-I_2)$ para que así la matriz de parámetros de transmisión de la conexión en cascada de varios bipuertos sea igual al producto de estas matrices correspondientes a cada uno de ellos.

Por otra parte, puede observarse que la determinación del parámetro $h_{21}$ exige el cálculo de una corriente de cortocircuito. Esto justifica que en este apartado se presente un ejemplo de obtención de la matriz de parámetros híbridos $h$ de un bipuerto.

En primer lugar, se considera el caso de un transistor bipolar, conectado en emisor común, utilizando el modelo de pequeña señal de la figura 2.44.

Para la determinación de los parámetros híbridos $h$ de este bipuerto, no es necesario recurrir al análisis de los circuitos de la figura 2.43 ya que pueden

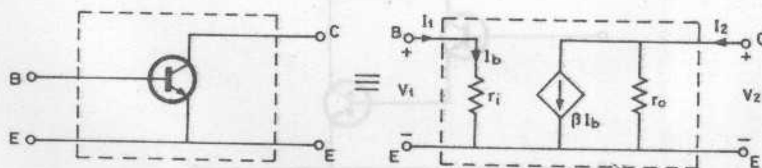



Figura 2.44 Modelo de pequeña señal del transistor bipolar.

obtenerse de forma inmediata aplicando una ecuación KVL en el puerto de entrada y una KCL en el de salida. En efecto, al ser $I_1 = I_b$ las relaciones entre las variables pueden escribirse como

$$V_1 = r_i I_1$$
$$I_2 = \beta I_1 + 1/r_0 V_2$$

de las que, identificando coeficientes, se obtiene

$$\underset{\sim}{h} = \begin{bmatrix} r_i & 0 \\ \beta & 1/r_0 \end{bmatrix}$$

Por otra parte, en el modelo de pequeña señal del transistor el valor de $r_0$ es mucho mayor que $r_i$, por lo que la matriz $\underset{\sim}{h}$ puede aproximarse por

$$\underset{\sim}{h} = \begin{bmatrix} r_i & 0 \\ \beta & 0 \end{bmatrix}$$

Se trata ahora de calcular los parámetros híbridos $h$ de la conexión Darlington de dos transistores cuyo esquema se representa en la figura 2.45, y comparar los resultados con los obtenidos para el bipuerto formado por un único transistor en emisor común.

El circuito para la determinación de $h_{11}$ y $h_{21}$ es el representado en la figura 2.46 en el que la tensión de salida es nula. La obtención de $h_{21}$ exige el cálculo de la corriente de cortocircuito $i_2$ que se hará por aplicación del método expuesto en este apartado.

Antes de proceder al análisis del circuito se deben hacer algunas consideraciones. Al ser $V_2 = 0$, la tensión y la corriente en el resistor de valor $r_0$, conectado al puerto de salida, son nulas, por lo que ni estas variables ni el parámetro $r_0$ aparecen en sus ecuaciones. Ello justifica el carácter superfluo de dicho resistor y su eliminación del circuito.

Por otra parte, el resistor $r_i$, conectado en serie con la fuente independiente de corriente, es también un elemento superfluo en el cálculo de variables en los

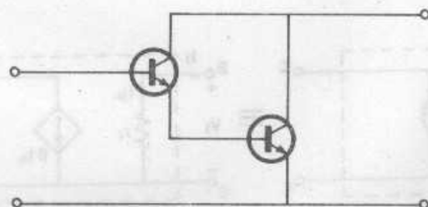


Figura 2.45 Conexión Darlington de dos transistores.

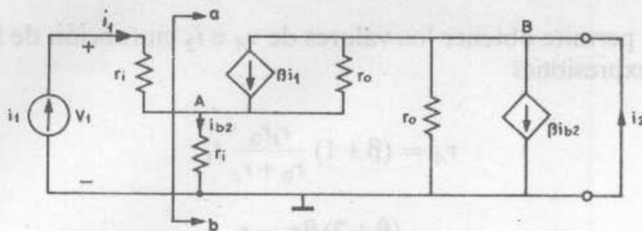



Figura 2.46 Circuito para la determinación de $h_{11}$ y $h_{21}$.

elementos situados a la derecha de la sección $a-b$, al ser idénticas las características tensión-intensidad de los circuitos de la figura 2.47.

Para el circuito que resulta de suprimir en el representado en la figura 2.46 los resistores $r_i$ y $r_0$, las ecuaciones nodales, con la corriente de cortocircuito $i_2$ en el segundo miembro, son

$$\begin{bmatrix} 1/r_i + 1/r_0 & -1/r_0 \\ -1/r_0 & 1/r_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_A \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\beta+1)\, i_1 \\ i_2 - \beta i_1 - \beta i_{b2} \end{bmatrix}$$

Sustituyendo en este sistema la intensidad de control por su valor en función de la tensión $v_A$, según

$$i_{b2} = \frac{v_A}{r_i}$$

y después de reordenar sus términos, de forma que las incógnitas $v_A$ e $i_2$ aparezcan únicamente en el vector de variables, resulta

$$\begin{bmatrix} 1/r_i + 1/r_0 & 0 \\ \beta/r_i - 1/r_0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_A \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\beta+1) \\ -\beta \end{bmatrix} i_1$$

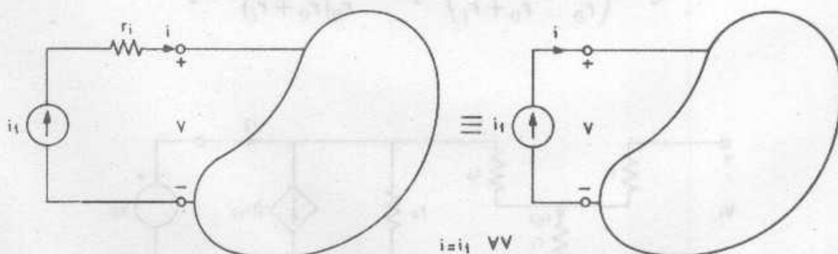



Figura 2.47 Circuitos equivalentes.

cuya solución permite obtener los valores de $v_A$ e $i_2$ en función de la excitación $i_1$, según las expresiones

$$v_A = (\beta+1)\,\frac{r_i r_0}{r_0+r_i}\,i_1$$

$$i_2 = \frac{(\beta+2)\,\beta r_0 - r_i}{r_0+r_i}\,i_1$$

Por otra parte, se cumple que

$$v_1 = v_A + r_i i_1 = \frac{(\beta+2)r_0+r_i}{r_0+r_i}\,r_i i_1$$

A partir de estos resultados es inmediata la determinación de los parámetros $h_{11}$ y $h_{21}$, como

$$h_{11} = \left.\frac{v_1}{i_1}\right|_{v_2=0} = \frac{(\beta+2)r_0+r_i}{r_0+r_i}\,r_i$$

$$h_{21} = \left.\frac{i_2}{i_1}\right|_{v_2=0} = \frac{\beta(\beta+2)r_0-r_i}{r_0+r_i}$$

En la figura 2.48 se representa el circuito para la determinación de los parámetros $h_{12}$ y $h_{22}$. Para obtenerlos hay que calcular $v_1$ e $i_2$ en función de $v_2$. Se observa que los resistores $r_i$ y $r_0$ están conectados en serie, por lo que se cumplirá que

$$i_{b2} = \frac{v_2}{r_0+r_i} \quad ; \quad v_1 = r_i i_{b2} = \frac{r_i}{r_0+r_i}\,v_2$$

Planteando la ecuación KCL del nodo de salida, resulta

$$i_2 = \left(\frac{1}{r_0} + \frac{\beta+1}{r_0+r_i}\right) v_2 = \frac{(\beta+2)r_0+r_i}{r_0(r_0+r_i)}\,v_2$$

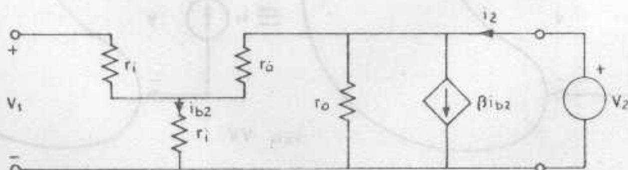



Figura 2.48 Circuito para la determinación de $h_{12}$ y $h_{22}$.

expresiones que permiten determinar los parámetros $h_{12}$ y $h_{22}$ como

$$h_{12}=\left.\frac{v_1}{v_2}\right|_{i_1=0}=\frac{r_i}{r_0+r_i} \quad ; \quad h_{22}=\left.\frac{i_2}{v_2}\right|_{i_1=0}=\frac{(\beta+2)r_0+r_i}{r_0(r_0+r_i)}$$

Agrupando los resultados parciales, la matriz de parámetros híbridos del bipuerto formado por la conexión Darlington de dos transistores, para los que se ha utilizado el modelo de pequeña señal de la figura 2.44, es

$$\underset{\sim}{h}=\frac{1}{r_0+r_i}\begin{bmatrix}[(\beta+2)r_0+r_i]r_i & r_i \\ \beta(\beta+2)r_0-r_i & \frac{1}{r_0}[(\beta+2)r_0+r_i]\end{bmatrix}$$

En el modelo de pequeña señal del transistor bipolar, el resistor $r_0$ es de valor mucho mayor que $r_i$. Si se hacen las aproximaciones de $r_0=\infty$ y $\beta \gg 1$, la matriz de parámetros híbridos $\underset{\sim}{h}$ puede escribirse como

$$\underset{\sim}{h}=\begin{bmatrix}\beta r_i & 0 \\ \beta^2 & 0\end{bmatrix}$$

Comparando este resultado con la matriz $h$ del transistor bipolar en emisor común, se observa que en la conexión Darlington se han multiplicado por β la impedancia de entrada y la amplificación de corriente con la salida en cortocircuito, resultado que justifica el interés de este circuito.

## 2.3 METODO DE LAS CORRIENTES DE MALLA

El metodo de las corrientes de malla se basa en la formulación de las ecuaciones KVL en determinados caminos cerrados, por lo que es muy adecuado para el análisis de circuitos que incorporan fuentes de tensión.

Su campo de aplicación está limitado a los circuitos planos y el planteamiento por inspección de las ecuaciones sólo es posible en caso de que el circuito incluya únicamente resistores, inductores, condensadores y fuentes de tensión independientes o controladas por corriente. Este último elemento recibe también el nombre de transductor corriente-tensión, se simboliza por CVT y viene definido por el parámetro transresistencia $r$.

En la exposición de este método se hará un desarrollo paralelo al que se siguió al describir el nodal, siendo para ello necesario introducir previamente las definiciones de circuito plano y malla, así como el concepto de dualidad.

Un circuito es plano si puede representarse sobre una superficie plana, de forma que las líneas que corresponden a sus ramas se corten únicamente en los puntos correspondientes a sus nodos. En la figura 2.49$a$ se muestra el esquema de un circuito en el que dos ramas se cortan en un punto que no es un nodo. A

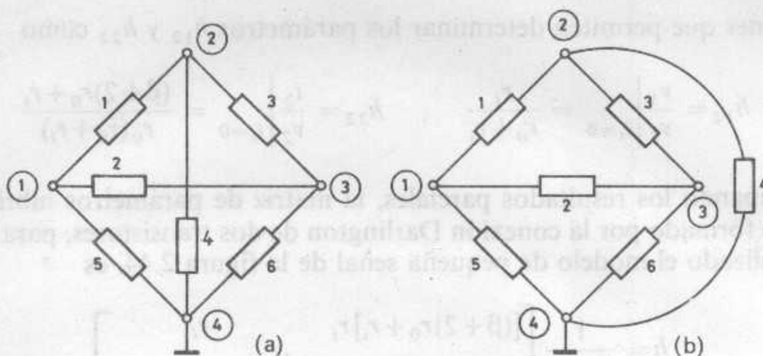



Figura 2.49 Dos representaciones equivalentes de un circuito plano.

pesar de ello, es posible dibujarlo de forma que esto no ocurra (figura 2.49*b*) sin modificar su estructura, de lo que puede concluirse que se trata de un circuito plano.

Por el contrario, el circuito representado en la figura 2.50 no es plano, al no poderse evitar que en su representación sobre una superficie algunos pares de ramas se corten en puntos que no son nodos.

En un circuito plano, las mallas son los caminos cerrados que no contienen otros en su interior y que están formados por elementos del circuito. El representado en la figura 2.49*b* tiene tres mallas definidas respectivamente por los elementos (1,3,2), (5,2,6) y (6,3,4).

El concepto de dualidad, que se presenta a continuación, permite formular el método de las corrientes de malla aplicando las conclusiones a las que se ha llegado en el estudio del nodal, en lo que se refiere a la independencia lineal de las ecuaciones, la definición de variables generadoras, el planteamiento por inspección de las ecuaciones de cierto tipo de circuitos, así como la elaboración de un algoritmo para su generación automática.

Para introducir el concepto de dualidad, considérense las ecuaciones KVL correspondientes a las mallas de un circuito plano, formuladas en términos de

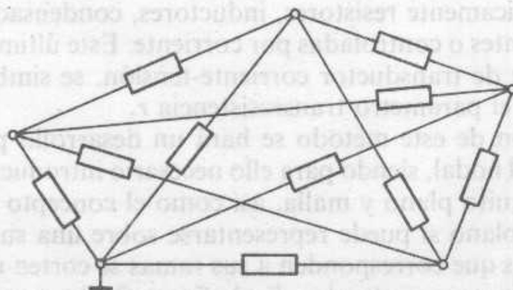


Figura 2.50 Circuito no plano.

las tensiones de rama, y las ecuaciones KCL planteadas en los nodos de otro, excluido el de referencia, expresadas en función de las corrientes de rama. Se dice que los dos circuitos tienen estructuras duales si el primer sistema de ecuaciones coincide con el segundo al cambiar las variables tensión por corriente.

Los dos circuitos de la figura 2.51 tienen estructuras duales. En efecto, si sus ecuaciones se plantean según el criterio de dar signo positivo a las caídas de tensión que aparecen al recorrer las mallas en sentido horario y a las corrientes salientes de los nodos, resultan los sistemas

$$\begin{aligned} V_1+V_3-V_2&=0 \\ V_5+V_2+V_6&=0 \qquad (2.38a) \\ -V_6-V_3+V_4&=0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} I_1+I_3-I_2&=0 \\ I_5+I_2+I_6&=0 \qquad (2.38b) \\ -I_6-I_3+I_4&=0 \end{aligned}$$

que coinciden si en el primero se cambian tensiones por intensidades.

En el apartado 2.2.1 se demostró que las ecuaciones KCL formuladas en términos de las intensidades de rama y planteadas en los nodos de un circuito, excepto en uno de ellos, son linealmente independientes. Esta propiedad sugiere que si para todo circuito plano existiese otro con una estructura dual, quedaría automáticamente probado que las ecuaciones KVL planteadas en sus mallas, y expresadas en función de las tensiones de rama, son también linealmente independientes. De ahí el interés de disponer de un método que a partir de un circuito plano permita la construcción de otro con una estructura dual. El que aquí se presenta consiste en señalizar las mallas con un punto, trazar una línea exterior cerrada que envuelva el circuito y unir los puntos entre sí o con dicha línea a través de las ramas. Para cada uno de los puntos se define un nodo en el dual, mientras que a la línea exterior se le hace corresponder el de referencia. En cuanto a los elementos, cada uno de ellos atravesado al unir dos puntos, o un punto y la línea exterior, se traduce en otro del dual, conectado entre los dos nodos correspondientes o al nodo y el de referencia, respectivamente. Las polaridades de las tensiones y los sentidos de referencia de las corrientes se fijan

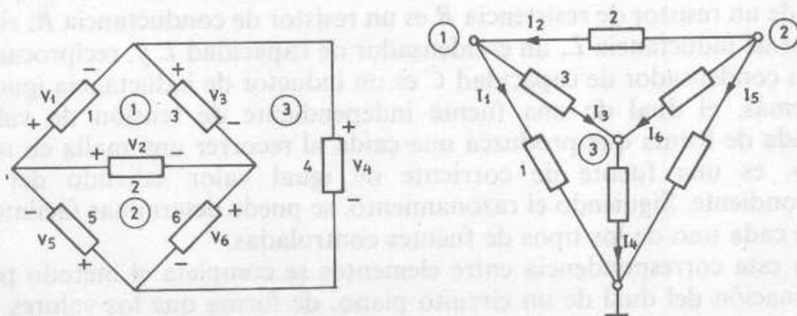



Figura 2.51 Circuitos con estructuras duales.

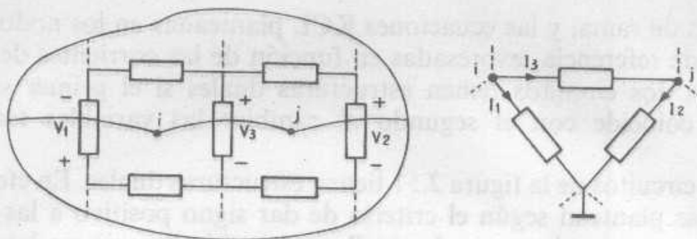


Figura 2.52 Construcción de un circuito con la estructura dual de uno plano.

de manera que si una tensión de rama representa una caída al recorrer la malla en sentido horario, la corriente en el elemento dual es saliente del nodo. En la figura 2.52 se ilustra la aplicación del método descrito a un caso general, pudiéndose comprobar que permite la construcción de un circuito con una estructura dual a la de uno plano.

Con esto queda probada la independencia lineal de las ecuaciones KVL planteadas en las mallas de un circuito plano y formuladas en términos de sus tensiones de rama. Esta propiedad justifica la utilización de dichas ecuaciones como base para el desarrollo de un método de análisis denominado de las corrientes de malla.

Si se pretende, además, que la coincidencia de las ecuaciones al permutar las variables tensión e intensidad se mantenga cuando se introducen las relaciones constitutivas de los elementos, para cualquiera de ellos definido por la expresión

$$V_r = Z I_r \tag{2.39}$$

la relación constitutiva del dual deberá ser

$$I_r = Z V_r \tag{2.40}$$

de donde se desprende que la impedancia de un elemento y la admitancia de su dual han de ser del mismo valor. Una consecuencia inmediata de ello es que el dual de un resistor de resistencia $R$ es un resistor de conductancia $R$; el de un inductor de inductancia $L$, un condensador de capacidad $L$ y, recíprocamente, el de un condensador de capacidad $C$ es un inductor de inductancia igual a $C$.

Además, el dual de una fuente independiente de tensión de valor $E$, conectada de forma que produzca una caída al recorrer una malla en sentido horario, es una fuente de corriente de igual valor saliendo del nodo correspondiente. Siguiendo el razonamiento, se puede determinar fácilmente el dual de cada uno de los tipos de fuentes controladas.

Con esta correspondencia entre elementos se completa el método para la determinación del dual de un circuito plano, de forma que los valores de las tensiones y corrientes de rama de uno de ellos coincidan, respectivamente, con las corrientes y tensiones de rama del otro.

Además, en un circuito la tensión de una rama conectada a los nodos $i$ y $j$, con el terminal positivo en el primero de ellos, puede expresarse como

$$V_r = V_i - V_j \tag{2.41}$$

donde $V_i$ y $V_j$ son tensiones nodales. Esto significa que en la correspondiente rama del circuito dual, que pertenecerá a las mallas $i$ y $j$, la corriente en el sentido horario de la primera de ellas podrá expresarse como la diferencia de dos intensidades de valores iguales a $V_i$ y $V_j$, de las que todavía no se dispone de una interpretación física. Extendiendo el razonamiento, la corriente $V_i$ será una componente de las intensidades de todas las ramas de la malla $i$. Esto sugiere la definición para cada malla de una corriente que recorre todos sus elementos en sentido horario, de forma que para una rama común a dos mallas su intensidad es igual a la diferencia de dos de estas corrientes, mientras que si pertenece al contorno del circuito coincide con una de ellas. Esta propiedad determina que las variables así definidas sean generadoras.

En la figura 2.53 se representa un circuito plano con sus corrientes de malla, pudiéndose expresar las corrientes de rama $I_A$, $I_B$ e $I_C$ en función de ellas según

$$\begin{aligned} I_A &= I_2 \\ I_B &= I_6 - I_3 \\ I_C &= I_8 - I_7 \end{aligned} \tag{2.42}$$

La corriente de malla $I_5$ no es directamente medible al no coincidir con ninguna de las intensidades de rama. En general, esto ocurrirá para todas las mallas que no tengan ramas en el contorno del circuito.

Para la malla 6 de la figura 2.53 la ecuación KVL es

$$Z_2(I_6 - I_5) + Z_3(I_6 - I_3) + Z_1(I_6 - I_9) = -E_1 \tag{2.43}$$

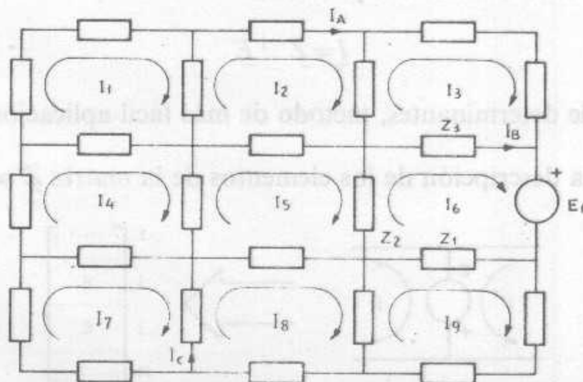



Figura 2.53 Corrientes de malla en un circuito plano.

Repitiendo el proceso para todas las mallas, reordenando los términos y generalizando los resultados para los circuitos RLC planos excitados con fuentes independientes de tensión, se llega al sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & \dots & Z_{1i} & \dots & Z_{1M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{i1} & \dots & Z_{ii} & \dots & Z_{iM} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{M1} & \dots & Z_{Mi} & \dots & Z_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ \dots \\ I_i \\ \dots \\ I_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ \dots \\ E_i \\ \dots \\ E_M \end{bmatrix} \tag{2.44}$$

donde $M$ es el número de mallas del circuito plano, y que puede escribirse como

$$\underset{\sim}{Z}\underline{I}=\underline{E} \tag{2.45}$$

expresión en la que $\underline{I}$ es el vector de las corrientes de malla y $\underline{E}$ el vector excitación, cuyas componentes son iguales a la suma algebraica de las fuentes independientes de tensión en elevación que se encuentran en cada una de sus mallas al recorrerlas en sentido horario.

En cuanto a la matriz $\underset{\sim}{Z}$, llamada de impedancias de malla, los elementos de la diagonal principal $Z_{ii}$ son iguales a la suma de las impedancias de las ramas de la malla $i$, mientras que el resto de términos, de expresión general $Z_{ij}$, se obtienen por suma cambiada de signo de las impedancias de las ramas comunes a las mallas $i$ y $j$.

Este resultado permite el planteamiento por inspección del sistema de ecuaciones de malla de un circuito RLC plano, excitado con fuentes independientes de tensión.

El primer miembro de cada una de las ecuaciones representa la suma de las caídas de tensión en las impedancias de la malla correspondiente al recorrerla en sentido horario, mientras que el segundo es igual a la suma algebraica de las fuentes de tensión en elevación presentes en la malla.

El vector $\underline{I}$ puede obtenerse a partir de

$$\underline{I}=\underset{\sim}{Z}^{-1}\,\underline{E} \tag{2.46}$$

o por cociente de determinantes, método de más fácil aplicación en el análisis manual.

A partir de la descripción de los elementos de la matriz $\underset{\sim}{Z}$ se concluye que

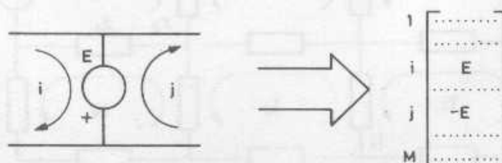



Figura 2.54 Incorporación del valor de una fuente independiente de tensión al vector excitación.

una impedancia de valor $Z$, perteneciente a las mallas $i$ y $j$, se incorpora a dicha matriz en las posiciones dadas por

$$\begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} \cdots & i & \cdots & j & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & Z & \cdots & -Z & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & -Z & \cdots & Z & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix} \qquad (2.47)$$

mientras que el valor de una fuente independiente de tensión $E$ aparece en el vector excitación $\underline{E}$ en la forma indicada en la figura 2.54.

En caso de que una impedancia o una fuente independiente de tensión pertenezca a una malla y al contorno del circuito, su valor sólo aparece en el elemento de la diagonal principal de $\underset{\sim}{Z}$ o en la fila del vector $\underline{E}$ correspondiente a dicha malla, respectivamente.

El método descrito permite la incorporación de fuentes de tensión controladas por corriente a través de la modificación de la matriz $\underset{\sim}{Z}$. En la figura 2.55 se muestra el esquema general de este elemento, en el que la fuente pertenece a las mallas $k$ y $l$ mientras que la intensidad de control está definida en una rama de las mallas $i$ y $j$.

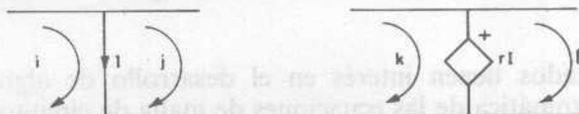



Figura 2.55 Fuente de tensión controlada por corriente. CVT.

Las expresiones de la intensidad de control y del valor de la fuente en función de las corrientes de malla son

$$\begin{aligned} I &= I_i - I_j \\ rI &= rI_i - rI_j \end{aligned} \qquad (2.48)$$

Al incorporar al primer miembro de la ecuación (2.45) las tensiones en las ramas definidas por su impedancia, el valor de la fuente se incluye en el segundo, siendo el vector $\underline{E}$ resultante

$$\begin{array}{c} \\ \\ k \\ \\ l \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} E_1 \\ \cdots\cdots \\ E_k - rI_i + rI_j \\ \cdots\cdots \\ E_l + rI_i - rI_j \\ \cdots\cdots \\ E_M \end{bmatrix} \tag{2.49}$$

Si los términos en $I_i$ e $I_j$ presentes en $\underline{E}$ se transfieren al primer miembro de las ecuaciones, la matriz de impedancias quedará modificada en el sentido de sumarse el valor de la transresistencia $r$ a los términos $Z_{ki}$ y $Z_{lj}$ y restarse de $Z_{kj}$ y $Z_{li}$, recuperando el vector excitación $\underline{E}$ la estructura que tenía en el caso de circuitos RLCE.

En conclusión, el valor de la transresistencia $r$ de la fuente de tensión controlada por corriente con los sentidos de referencia indicados en la figura 2.55, se incorpora a la matriz de impedancia en las filas y columnas indicadas por

$$\begin{array}{c} \\ k \\ l \\ \end{array}\begin{bmatrix} & \vdots & i & \vdots & j & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & r & \cdots & -r & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & -r & \cdots & r & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \tag{2.50}$$

Estos resultados tienen interés en el desarrollo de algoritmos para la formulación automática de las ecuaciones de malla de circuitos RLCrE.

*Ejemplo 2.13 Análisis por el método de las corrientes de malla de un circuito con acoplamiento magnético.*

Se trata de determinar la función de red

$$H(s) = \frac{I(s)}{V_g(s)}$$

en el circuito de la figura 2.56, que incluye dos inductores acoplados magnéticamente, utilizando para el transistor el modelo de la figura 2.44. El parámetro $M$ recibe el nombre de inductancia mutua.

Sustituyendo en el circuito de la figura 2.56 el transistor por su modelo y cambiando la fuente controlada de corriente por una de tensión, se obtiene el representado en la figura 2.57.

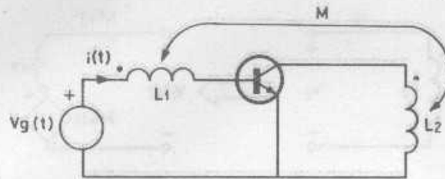



Figura 2.56 Circuito con inductores acoplados magnéticamente.

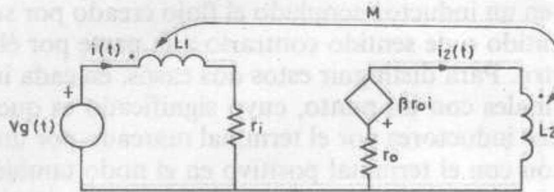



Figura 2.57 Circuito equivalente para pequeña señal.

El acoplamiento magnético entre dos inductores consiste en que parte del flujo de uno de ellos es concatenado por el otro, de forma que las variaciones de la corriente en un inductor generan una tensión en el acoplado.

En la figura 2.58 se representan dos inductores acoplados con indicación de las variables, sentidos de referencia y valores de los elementos, pudiéndose expresar las relaciones constitutivas y sus ecuaciones transformadas, en el caso de que las condiciones iniciales sean iguales a cero, como

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \quad ; \quad v_1(s) = L_1 sI_1 \pm MsI_2$$

$$v_2 = \pm M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \quad ; \quad v_2(s) = \pm MsI_1 + L_2 sI_2 \tag{2.51}$$

de forma que en el circuito transformado, los términos $\pm MsI_1$ y $\pm MsI_2$ se modelan con fuentes de tensión controladas por corriente. En este caso, la relación entre el valor de la fuente y la magnitud de control no es algebraica, al contrario de lo que sucede en los transductores corriente-tensión a los que se había hecho referencia hasta ahora.

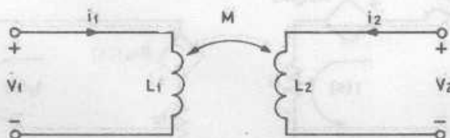



Figura 2.58 Inductores acoplados magnéticamente.

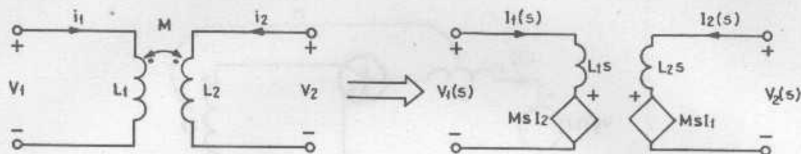



Figura 2.59 Circuito transformado del acoplamiento magnético.

La indeterminación de signos que se observa en las ecuaciones (2.51) proviene de que en un inductor acoplado el flujo creado por su corriente puede ser del mismo sentido o de sentido contrario a la parte por él concatenada del generado en el otro. Para distinguir estos dos casos, en cada inductor se marca uno de sus terminales con un punto, cuyo significado es que la corriente que entra en uno de los inductores por el terminal marcado por un punto genera en el otro una tensión con el terminal positivo en el nodo también marcado. Este convenio justifica los circuitos transformados que se muestran en las figuras 2.59 y 2.60.

Aplicando lo anterior, el circuito de la figura 2.61 es el transformado del representado en la figura 2.57.

Para el análisis de circuitos con inductores acoplados, el método más adecuado es el de las corrientes de malla, ya que en su transformado intervienen fuentes de tensión controladas por corriente cuyos valores se incorporan a las ecuaciones de forma directa.

Para el circuito de la figura 2.61 el sistema de ecuaciones de malla puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} L_1s+r_i & 0 \\ 0 & L_2s+r_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_g(s)-MsI_2(s) \\ -\beta r_0 I(s)-MsI(s) \end{bmatrix}$$

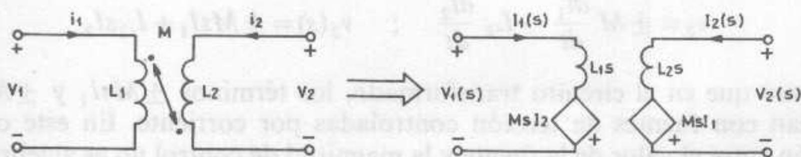



Figura 2.60 Circuito transformado del acoplamiento magnético.

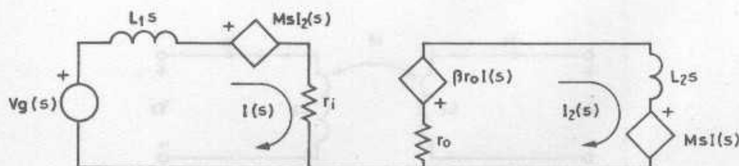



Figura 2.61 Circuito transformado.

del que, transfiriendo al primer miembro los términos en $I(s)$ e $I_2(s)$ presentes en el segundo, se obtiene

$$\begin{bmatrix} L_1 s + r_i & Ms \\ Ms + \beta r_0 & L_2 s + r_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_g(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuya solución permite determinar la función de red

$$H(s) = \frac{I(s)}{V_g(s)} = \frac{L_2 s + r_0}{(L_1 L_2 - M^2)\, s^2 + (r_0 L_1 + r_i L_2 - \beta r_0 M)\, s + r_i r_0}$$

Puede demostrarse que para dos inductores cuyas inductancias sean $L_1$ y $L_2$, el valor máximo de la inductancia mutua viene dado por la expresión

$$M_{max} = \sqrt{L_1 L_2}$$

por lo que el circuito analizado será estable siempre que se cumpla que

$$M < \frac{r_0 L_1 + r_i L_2}{\beta r_0}$$

al reducirse la condición de estabilidad de un circuito de segundo orden a que los tres coeficientes del denominador de la función de red sean positivos.

## 2.4 METODO NODAL MODIFICADO (MNA)

### 2.4.1 Introducción

El de las corrientes de malla está muy lejos de poder ser considerado un método general. Por una parte, su campo de aplicación está limitado a los circuitos planos y, por otra, sólo permite el planteamiento de las ecuaciones por inspección en el caso de circuitos que incluyen fuentes de tensión independientes o controladas por corriente, además de resistores, inductores y condensadores.

El Método Nodal no tiene limitaciones en lo que se refiere a la estructura al ser aplicable tanto a los planos como a los que no tienen esta propiedad. No obstante, sólo se pueden formular directamente sus ecuaciones en el caso de circuitos con fuentes de corriente independientes o controladas por tensión, además de los elementos pasivos antes citados. Las distintas modificaciones que se han presentado para adaptarlo a excitaciones modeladas con fuentes de tensión y a la presencia de amplificadores operacionales en el circuito, aunque permiten resolver casos de gran interés práctico, no son suficientes para darle un carácter general.

Parece, pues, interesante disponer de métodos aplicables a cualquier

circuito, independientemente de su estructura, que admitan elementos de todo tipo y que conduzcan a una formulación traducible a algoritmos fácilmente implementables en ordenador. Entre ellos destacan el Nodal Modificado, MNA (Modified Nodal Approach), y el de los dos grafos que se presentan en este apartado y en el siguiente.

### 2.4.2 Descripción del método

El Método Nodal Modificado (MNA) es una generalización del Nodal aplicable al análisis de circuitos con todo tipo de elementos de dos terminales, RLCJE; de cuatro, como son las fuentes controladas VCT, CCT, VVT, CVT, y el acoplamiento magnético; amplificadores operacionales ideales y con modelos que incorporan el producto finito ganancia-ancho de banda, además de bipuertos definidos por sus parámetros homogéneos, híbridos o de transmisión.

En el Método Nodal Modificado los elementos resistor, condensador y fuente de corriente independiente o controlada por tensión se tratan de la misma forma que en el Nodal, lo que implica que las tensiones de los nodos sean variables del sistema de ecuaciones. Para el resto de elementos, incluido el inductor, sus relaciones constitutivas se incorporan como ecuaciones adicionales, apareciendo así algunas intensidades de rama como variables.

Consecuencia de lo anterior es que el orden de la matriz del sistema es mayor que la obtenida por aplicación del Nodal, excepto en el caso particular de circuitos RCgJ, razón por la que el Método Nodal Modificado tiene mayor interés en el análisis automático que en el manual.

Precisamente, en la línea de su implementación en ordenador y con el fin de facilitar la elaboración de programas para la determinación de funciones de red y de la respuesta temporal del circuito, el Método Nodal Modificado se formula de manera que el sistema de ecuaciones sea de la forma

$$\underset{\sim}{T}\,\underline{X}=\underline{W} \qquad (2.52)$$

con los términos de la matriz $\underset{\sim}{T}$ de primer grado en $s$, lo que permite su expresión según

$$\underset{\sim}{T}=s\underset{\sim}{C}+\underset{\sim}{G} \qquad (2.53)$$

en la que las matrices $\underset{\sim}{C}$ y $\underset{\sim}{G}$ son reales.

Tiene interés destacar que, a diferencia de lo que ocurre en el Método Nodal, la matriz del sistema no tiene términos en $s^{-1}$, por lo que su determinante coincide con el polinomio $D(s)$, denominador de las funciones de red del circuito. Para ello la relación constitutiva de los inductores, expresada en función de su impedancia $Ls$, debe incluirse en el sistema como una ecuación adicional.

Se describe a continuación la forma en que los distintos elementos se incorporan a la matriz $\underset{\sim}{T}$ y al vector $\underline{W}$. Para cada uno de ellos se trata el caso general. Evidentemente, si un elemento está conectado al nodo de referencia, su

valor sólo aparece en las filas y columnas correspondientes a sus otros nodos y, en su caso, en la fila de la ecuación adicional correspondiente.

### 1. Conductancia G

El valor $G$ de la conductancia se incorpora a las ecuaciones del circuito de la misma forma que en el Método Nodal, tal como se muestra en la figura 2.62.

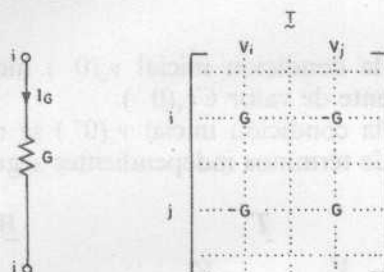



Figura 2.62 Incorporación del valor de la conductancia a la matriz $\underset{\sim}{T}$

Si se pretende determinar la intensidad $I_G$, esta variable ha de incluirse en el sistema a través de la ecuación adicional

$$GV_i - GV_j - I_G = 0 \tag{2.54}$$

debiendo aparecer además en el primer miembro de las ecuaciones correspondientes a los nodos $i$ y $j$, con signo positivo y negativo, respectivamente. La parte de la matriz $\underset{\sim}{T}$ afectada por este elemento es

$$\underset{\sim}{T} \qquad \begin{array}{c|ccc} & V_i & V_j & I_G \\ \hline i & & & 1 \\ j & & & -1 \\ \text{EA} & G & -G & -1 \end{array} \tag{2.55}$$

donde EA se utiliza como símbolo de ecuación adicional.

### 2. Condensador C

Al igual que el caso anterior, este elemento se incorpora al sistema de ecuaciones de la misma forma que en el Método Nodal. En la figura 2.63 se representa el transformado del condensador de capacidad $C$, definido por su

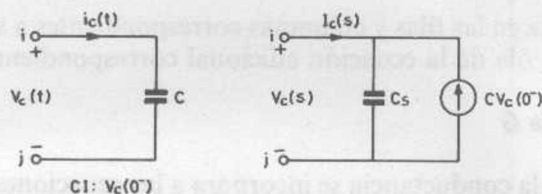



Figura 2.63 Transformado del condensador.

admitancia $Cs$ y con la condición inicial $v_c(0^-)$ modelada con una fuente independiente de corriente de valor $Cv_c(0^-)$.

La capacidad $C$ y la condición inicial $v_c(0^-)$ se reflejan en la matriz del sistema y en el vector de términos independientes según

$$\begin{array}{c} \underset{\sim}{T} \\ \begin{array}{cc} V_i & V_j \end{array} \end{array} \qquad \underline{W}$$

$$\begin{array}{c} i \\ j \end{array} \begin{bmatrix} Cs & -Cs \\ -Cs & Cs \end{bmatrix} \begin{array}{c} i \\ j \end{array} \begin{bmatrix} Cv_c(0^-) \\ -Cv_c(0^-) \end{bmatrix} \tag{2.56}$$

Si se define la intensidad $I_c$ como variable de salida, la ecuación adicional a plantear es

$$CsV_i - CsV_j - I_c = Cv_c(0^-) \tag{2.57}$$

que se incluye en $\underset{\sim}{T}$ y $\underline{W}$ de la forma

$$\begin{array}{c} \underset{\sim}{T} \\ \begin{array}{ccc} V_i & V_j & I_c \end{array} \end{array} \qquad \underline{W}$$

$$\begin{array}{c} i \\ j \\ \text{EA} \end{array} \left[\begin{array}{cc:c} & & 1 \\ & & -1 \\ \hdashline Cs & -Cs & -1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \\ \\ \hdashline Cv_c(0^-) \end{array}\right] \tag{2.58}$$

### *3. Fuente de corriente controlada por tensión. VCT*

Este elemento viene definido por el valor de su transconductancia $g$. Al igual que en los casos anteriores, se incorpora al sistema de ecuaciones de la misma forma que en el Método Nodal, tal como se muestra en la figura 2.64.

Si se pretende determinar la intensidad $I_g$ en la fuente controlada de corriente, la ecuación adicional a formular es

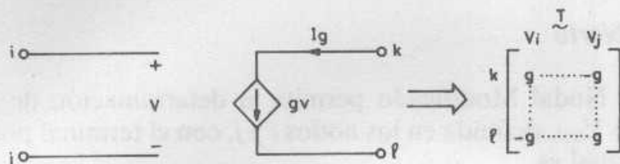



Figura 2.64 Fuente de corriente controlada por tensión. VCT.

$$gV_i - gV_j - I_G = 0 \qquad (2.59)$$

de manera que el elemento VCT se incorpora a la matriz $\underset{\sim}{T}$ según

$$\begin{array}{c} \\ \\ k \\ l \\ \text{EA} \end{array} \overset{\underset{\sim}{T}}{\begin{array}{cc|c} V_i & V_j & I_G \\ \hline & & 1 \\ & & -1 \\ \hline g & -g & -1 \end{array}} \qquad (2.60)$$

## 4. *Fuente independiente de corriente. J*

Como puede verse en la figura 2.65, el valor $J$ de la fuente independiente de corriente afecta solamente al vector $\underline{W}$, término independiente del sistema de ecuaciones del circuito.

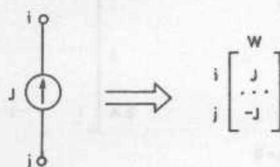



Figura 2.65 Fuente independiente de corriente.

Los cuatro elementos descritos no implican efectuar cambio alguno en el Método Nodal, excepto en el caso de que se definan sus corrientes de rama como variables de salida. Se presenta a continuación el tratamiento por el Método Nodal Modificado del resto de elementos del circuito. Para cada uno de ellos hay que incluir en el sistema una variable y una ecuación adicionales, excepto en el caso de la fuente de tensión controlada por corriente (CVT) que exige dos.

## 5. *Circuito abierto*

El Método Nodal Modificado permite la determinación de la tensión de circuito abierto $V_{OC}$, definida en los nodos $i$ y $j$, con el terminal positivo en $i$. La ecuación adicional es

$$V_i - V_j - V_{OC} = 0 \tag{2.61}$$

que se incorpora al sistema en una fila de la matriz $\underset{\sim}{T}$, según

$$\begin{array}{c} \underset{\sim}{T} \\ \begin{array}{cccc} & V_i & V_j & V_{OC} \\ \text{EA} & [\,1 & -1 & \vdots\; -1\,] \end{array} \end{array} \tag{2.62}$$

Para evitar que el orden de la matriz $\underset{\sim}{T}$ aumente de forma innecesaria, puede prescindirse de incluir a $V_{OC}$ como variable y calcularla después de la resolución del sistema como diferencia entre las tensiones nodales $V_i$ y $V_j$.

## 6. *Resistor y cortocircuito*

El resistor definido por su parámetro resistencia $R$ se incorpora al sistema de ecuaciones de la forma indicada en la figura 2.66.

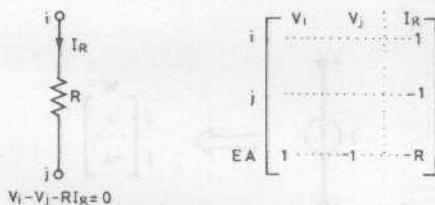



Figura 2.66 Resistor.

El tratamiento del resistor por su parámetro resistencia, y no por su conductancia, exige aumentar el número de ecuaciones del sistema en una unidad, lo que solamente está justificado si se pretende determinar la intensidad $I_R$, o bien si el valor de $R$ es igual a cero. En este último caso se trata de un cortocircuito entre los nodos $i$ y $j$, incluyéndose la corriente de cortocircuito como variable según el esquema

$$
\begin{array}{c} \\ \\ i \\ j \\ \\ EA \end{array}
\overset{\displaystyle \underset{\sim}{T}}{\overset{\begin{array}{ccc} V_i & V_j & I_{CC} \end{array}}{\left[\begin{array}{cc:c} & & 1 \\ & & -1 \\ \hdashline 1 & -1 & 0 \end{array}\right]}}
\tag{2.63}
$$

que coincide con el anterior para $R=0$.

## 7. *Inductor*

Con el fin de evitar la presencia de términos en $s^{-1}$ en la matriz $\underset{\sim}{T}$, el inductor se incorpora al sistema de ecuaciones a través de su impedancia $Ls$.

En la figura 2.67 se representa este elemento y su transformado, incluyendo la fuente independiente de tensión que modela la corriente inicial.

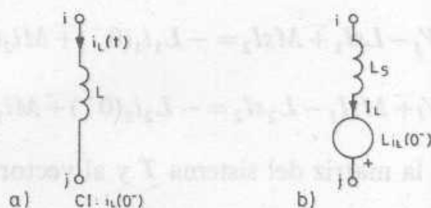



Figura 2.67 *a)* Inductor. *b)* Transformado del inductor.

La relación constitutiva es

$$V_i - V_j - LsI_L = -Li_L(0^-) \tag{2.64}$$

que se incorpora a las ecuaciones de la forma

$$
\begin{array}{c} \\ \\ i \\ j \\ \\ \mathrm{EA} \end{array}
\overset{\displaystyle \underset{\sim}{T}}{\overset{\begin{array}{ccc} V_i & V_j & I_L \end{array}}{\left[\begin{array}{cc:c} & & 1 \\ & & -1 \\ \hdashline 1 & -1 & -Ls \end{array}\right]}}
\overset{\displaystyle \underset{\sim}{W}}{\left[\begin{array}{c} \\ \\ \hdashline -Li_L(0^-) \end{array}\right]}
\tag{2.65}
$$

## 8. *Acoplamiento magnético*

En la figura 2.68 se representa el símbolo de dos inductores acoplados magnéticamente.

Las ecuaciones en el dominio temporal son

$$V_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}$$
$$V_2 = \pm M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \qquad (2.66)$$

y sus transformadas responden a

$$V_1(s) = L_1 s I_1(s) - L_1 i_1(0^-) \pm Ms I_2(s) \mp M i_2(0^-)$$
$$V_2(s) = \pm Ms I_1(s) \mp M i_1(0^-) + L_2 s I_2(s) - L_2 i_2(0^-) \qquad (2.67)$$

que dan lugar a las ecuaciones adicionales

$$V_i - V_j - LsI_1 \mp MsI_2 = -L_1 i_1(0^-) \mp M i_2(0^-)$$
$$V_k - V_l \mp MsI_1 - L_2 s I_2 = -L_2 i_2(0^-) \mp M i_1(0^-) \qquad (2.68)$$

y que se incorporan a la matriz del sistema $\underset{\sim}{T}$ y al vector $\underline{W}$ según

$$\underset{\sim}{T} = \begin{array}{c} \\ i \\ j \\ k \\ l \\ \\ \text{EA1} \\ \text{EA2} \end{array} \left[ \begin{array}{cccc:cc} V_i & V_j & V_k & V_l & I_1 & I_2 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & -1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 & -1 \\ \hdashline 1 & -1 & 0 & 0 & -L_1 s & \mp Ms \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \mp Ms & -L_2 s \end{array} \right] \qquad \underline{W} = \left[ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \hdashline -L_1 i_1(0^-) \mp M i_2(0^-) \\ -L_2 i_2(0^-) \mp M i_1(0^-) \end{array} \right] \qquad (2.69)$$

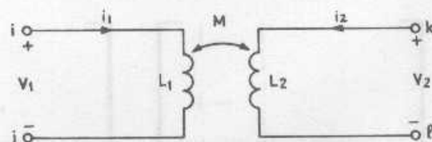



Figura 2.68 Acoplamiento magnético.

La indeterminación del signo de los términos en $M$ se resuelve con el convenio del punto expuesto en el ejemplo 2.13.

### 9. *Fuente independiente de tensión. E*

En la figura 2.69 se representa el símbolo de este elemento y su relación constitutiva.

En este caso la variable adicional es la corriente $I_E$, afectando a la matriz $\underset{\sim}{T}$ y al vector $\underline{W}$ en la forma

$$
\begin{array}{c}
\underset{\sim}{T} \\
\begin{array}{c} \\ i \\ j \\ \\ \mathrm{EA} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} V_i & V_j & I_E \end{array} \\
\left[\begin{array}{cc:c}
 & & 1 \\
 & & -1 \\
\hdashline
1 & -1 &
\end{array}\right]
\end{array}
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\underline{W} \\
\left[\begin{array}{c}
 \\
 \\
\cdots \\
E
\end{array}\right]
\end{array}
\qquad (2.70)
$$

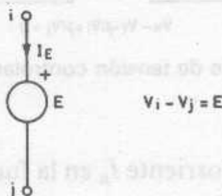



Figura 2.69 Fuente independiente de tensión.

### 10. *Fuente de corriente controlada por corriente. CCT*

En la figura 2.70 se representa este elemento y su relación constitutiva. La variable adicional es la intensidad de control $I$. Su incorporación al sistema de ecuaciones se hace según

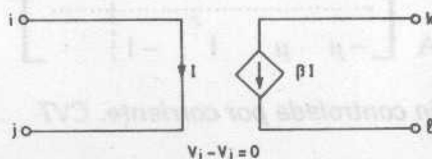



Figura 2.70 Fuente de corriente controlada por corriente. CCT.

$$
\begin{array}{c}
\underset{\sim}{T} \\
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc:c} V_i & V_j & V_k & V_l & I \end{array} \\
\begin{array}{c} i \\ j \\ k \\ l \\ \\ \text{EA} \end{array} &
\left[\begin{array}{cccc:c}
 & & & & 1 \\
 & & & & -1 \\
 & & & & \beta \\
 & & & & -\beta \\
\hdashline
1 & -1 & & &
\end{array}\right]
\end{array}
\end{array}
\qquad (2.71)
$$

## 11. *Fuente de tensión controlada por tensión. VVT*

En la figura 2.71 se representa este elemento con su relación constitutiva.

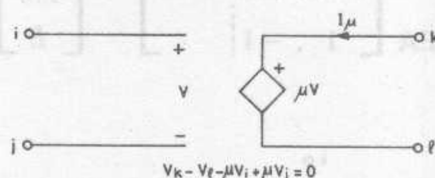



Figura 2.71 Fuente de tensión controlada por tensión. VVT.

La variable adicional es la corriente $I_\mu$ en la fuente de tensión, incorporándose a las ecuaciones de la forma

$$
\begin{array}{c}
\underset{\sim}{T} \\
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc:c} V_i & V_j & V_k & V_l & I_\mu \end{array} \\
\begin{array}{c} i \\ j \\ k \\ l \\ \\ \text{EA} \end{array} &
\left[\begin{array}{cccc:c}
 & & & & \\
 & & & & \\
 & & & & 1 \\
 & & & & -1 \\
\hdashline
-\mu & \mu & 1 & -1 &
\end{array}\right]
\end{array}
\end{array}
\qquad (2.72)
$$

## 12. *Fuente de tensión controlada por corriente. CVT*

Para este elemento, cuyo símbolo y relaciones constitutivas se muestran en la figura 2.72, el número de variables y ecuaciones adicionales es igual a dos.

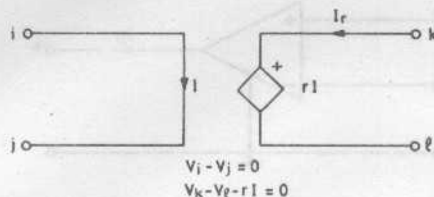



Figura 2.72 Fuente de tensión controlada por corriente. CVT.

Su incorporación al sistema de ecuaciones se hace según

$$
\begin{array}{c} \\ i \\ j \\ k \\ l \\ \\ EA1 \\ EA2 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc:cc} & & T & & & \\ V_i & V_j & V_k & V_l & I & I_r \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccc:cc}
 & & & & 1 & \\
 & & & & -1 & \\
 & & & & & 1 \\
 & & & & & -1 \\
\hdashline
1 & -1 & & & & \\
 & & 1 & -1 & -r &
\end{array}\right]
\end{array}
\qquad (2.73)
$$

### 13. *Amplificador operacional*

El modelo ideal del amplificador operacional se caracteriza por el valor infinito de la amplificación, lo que implica que se forme un cortocircuito virtual entre los nodos a los que están conectadas sus entradas. En consecuencia, la relación constitutiva para el amplificador operacional representado en la figura 2.73 es

$$V_i - V_j = 0 \qquad (2.74)$$

que se incorpora a las ecuaciones del sistema junto con la variable adicional $I_k$, según

$$
\begin{array}{c} \\ k \\ \\ EA \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc:c} V_i & V_j & I_k \end{array} \\
\left[\begin{array}{cc:c}
 & & -1 \\
\hdashline
1 & -1 &
\end{array}\right]
\end{array}
\qquad (2.75)
$$

Tal como se comentó en el apartado 2.2.4, al utilizar el modelo ideal se generan errores que pueden ser de gran importancia. En efecto, en los circuitos estables y para señales de excitación con la amplitud limitada de forma que no

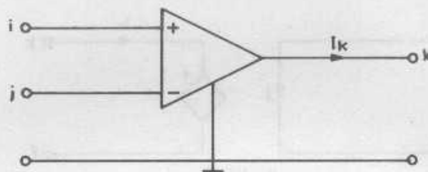



Figura 2.73 Amplificador operacional.

se saturen los amplificadores operacionales, las características frecuenciales previstas en el análisis y las reales pueden diferir notablemente. Además, otros circuitos, que se obtienen de los anteriores permutando los nodos a los que se conectan las entradas de uno o varios de los amplificadores operacionales, pueden ser inestables, saturándose estos dispositivos para cualquier valor de la amplitud de la señal de excitación y presentando un marcado carácter no lineal, con aplicaciones muy diferentes a las propias de los circuitos estables. La explicación de este comportamiento requiere para el amplificador operacional modelos más aproximados y de mayor complejidad.

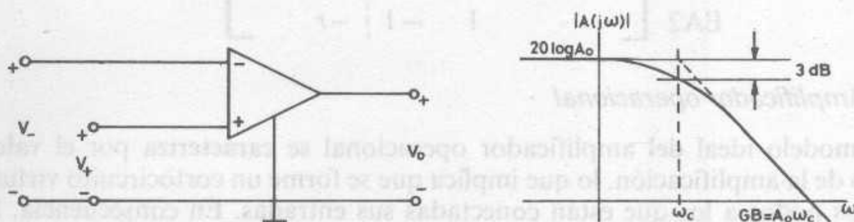



Figura 2.74 Ganancia en lazo abierto del amplificador operacional.

Uno de los factores con más incidencia en los errores derivados de la utilización del modelo ideal es que la ganancia de los amplificadores operacionales es finita y decreciente con la frecuencia. En la figura 2.74 se ilustra una buena aproximación de su diagrama de ganancia en lazo abierto correspondiente a

$$A(s)=\frac{V_0(s)}{V_+(s)-V_-(s)} \qquad (2.76)$$

El parámetro $A_0$ es la amplificación en continua ($\omega=0$), $\omega_c$, la frecuencia de corte ($\omega_{3dB}$) y $GB=A_0\omega_c$, que recibe el nombre de producto ganancia-ancho de banda, es la frecuencia a la que la amplificación asintótica es igual a la unidad y la ganancia nula. Valores corrientes de $A_0$, $\omega_c$ y $GB$ son

$$A_0 = 10^5$$
$$f_c = 10 \text{ Hz} \quad ; \quad \omega_c = 2\pi \ 10 \text{ rad/s}$$
$$GB = 1 \text{ MHz}$$

que corresponden al A.O. tipo 741, uno de los amplificadores operacionales de uso más común.

En cuanto a la expresión analítica de $A(s)$ que corresponde a la curva de ganancia de la figura 2.74 es

$$A(s) = \frac{A_0 \omega_c}{s + \omega_c} = \frac{GB}{s + \omega_c} \tag{2.77}$$

Con el modelo que se acaba de definir, la relación constitutiva del amplificador operacional de la figura 2.73 es

$$V_k(s) = A(s)\,[V_i(s) - V_j(s)] \tag{2.78}$$

que después de definir $B(s)$ como

$$B(s) = -\frac{1}{A(s)} \tag{2.79}$$

se transforma en

$$V_i(s) - V_j(s) + B(s)\,V_k(s) = 0 \tag{2.80}$$

La expresión de $B(s)$ es

$$B(s) = -\frac{s + \omega_c}{GB} \tag{2.81}$$

que, por ser de primer orden en $s$, puede incorporarse a las ecuaciones del sistema según

$$\begin{array}{c} \\ k \\ \\ \text{EA} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} V_i & V_j & V_k & I_k \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc:c} & & & -1 \\ \hdashline 1 & -1 & B & \end{array}\right] \end{array} \tag{2.82}$$

El amplificador operacional ideal es un caso particular del modelo descrito en el que la amplificación $A(s)$ es infinita para todas las frecuencias, siendo, por tanto

$$B(s) = 0 \tag{2.83}$$

condición bajo la cual la ecuación (2.80) se convierte en la expresada en (2.74).

Analizando la estructura de la matriz $\underset{\sim}{T}$ se puede llegar a conclusiones interesantes. En efecto, suponiendo un circuito resistivo con un solo amplificador operacional, los términos de $\underset{\sim}{T}$ son todos reales excepto $B(s)$, por lo que su determinante es igual a un polinomio de primer grado, que coincide con el denominador de la función de red. Si su raíz es negativa el circuito es estable, teniendo sentido en este caso el estudio de la respuesta frecuencial. A frecuencia nula se cumple que $B(0)=-1/A_0\approx 0$, lo que explica que las diferencias entre los resultados obtenidos con el modelo ideal ($B=0$) y con el que se ha descrito sean poco significativas, adquiriendo mayor importancia a otras frecuencias.

Por otra parte, al permutar los nodos a los que están conectadas las entradas del amplificador operacional, la relación constitutiva pasa a ser

$$-V_i(s)+V_j(s)+B(s)\,V_k(s)=0 \tag{2.84}$$

que puede escribirse como

$$V_i(s)-V_j(s)-B(s)\,V_k(s)=0 \tag{2.85}$$

expresión que coincide con (2.80) al sustituir $B(s)$ por $-B(s)$. Si se admite la aproximación $B(s)=-s/GB$, que proviene de considerar que la frecuencia de la señal de excitación $\omega$ es mucho mayor que $\omega_c$, el cambio de signo de $B(s)$ implica que el polo de la función de red, teniendo el mismo valor absoluto, sea de signo distinto. Con esto queda explicado que en un circuito resistivo con un amplificador operacional la permutación de los nodos a los que están conectadas las entradas de este dispositivo provoca que un circuito estable pierda esta condición y que uno inestable la adquiera.

En el ejemplo 2.16 se presentará el estudio detallado de un caso particular.

El resultado anterior es generalizable a circuitos con varios amplificadores operacionales, habiéndose considerado que su estudio escapa del alcance de este texto.

## *14. Bipuertos*

El Método Nodal Modificado permite el tratamiento de bipuertos definidos por sus parámetros homogéneos, híbridos o de transmisión.

### *A. Parámetros admitancia*

En el Método Nodal Modificado los parámetros admitancia de un bipuerto pueden incluirse en la matriz del sistema sin necesidad de recurrir a ecuaciones adicionales.

En la figura 2.75 se representa el esquema general de un bipuerto, indicando sus variables y sentidos de referencia.



Figura 2.75 Esquema general de un bipuerto.

Las ecuaciones que definen los parámetros admitancia son

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \tag{2.86}$$

$$\underline{I} = \underset{\sim}{Y} \underline{V}$$

que expresadas en función de las tensiones de nodo pueden ser escritas como

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11}(V_i - V_j) + Y_{12}(V_k - V_e) \\ I_2 &= Y_{21}(V_i - V_j) + Y_{22}(V_k - V_e) \end{aligned} \tag{2.87}$$

incorporándose a la matriz del sistema $\underset{\sim}{T}$ en la forma

$$\begin{array}{c} \\ i \\ j \\ k \\ l \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} V_i & V_j & V_k & V_l \end{array} \\ \begin{bmatrix} Y_{11} & -Y_{11} & Y_{12} & -Y_{12} \\ -Y_{11} & Y_{11} & -Y_{12} & Y_{12} \\ Y_{21} & -Y_{21} & Y_{22} & -Y_{22} \\ -Y_{21} & Y_{21} & -Y_{22} & Y_{22} \end{bmatrix} \end{array} \tag{2.88}$$

que representa una generalización del caso de un elemento definido por su admitancia $Y$. A título de ejemplo, se presenta la inclusión en la matriz $\underset{\sim}{T}$ del girador representado en la figura 2.76.

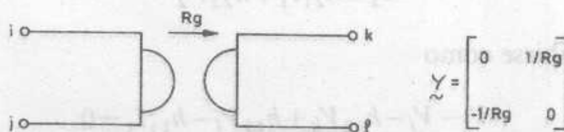


Figura 2.76 Símbolo de un girador.

$$
\begin{array}{c} \\ i \\ j \\ k \\ l \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} V_i & V_j & V_k & V_l \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccc}
0 & 0 & +1/Rg & -1/Rg \\
0 & 0 & -1/Rg & +1/Rg \\
-1/Rg & +1/Rg & 0 & 0 \\
+1/Rg & -1/Rg & 0 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
\tag{2.89}
$$

*B. Parámetros impedancia*

Las ecuaciones de definición de los parámetros impedancia son

$$
\begin{aligned}
V_i - V_j &= Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\
V_k - V_l &= Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2
\end{aligned}
\tag{2.90}
$$

que se incorporan a la matriz del sistema según

$$
\begin{array}{c|cccc:cc}
 & V_i & V_j & V_k & V_l & I_1 & I_2 \\
\hline
i & & & & & 1 & \\
j & & & & & -1 & \\
k & & & & & & 1 \\
l & & & & & & -1 \\
\hdashline
EA1 & 1 & -1 & & & -Z_{11} & -Z_{12} \\
EA2 & & & 1 & -1 & -Z_{21} & -Z_{22}
\end{array}
\tag{2.91}
$$

*C. Parámetros híbridos h*

Las ecuaciones que definen los parámetros híbridos $h$ de un bipuerto son

$$
\begin{aligned}
V_1 &= h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \\
I_2 &= h_{21} I_1 + h_{22} V_2
\end{aligned}
\tag{2.92}
$$

que pueden escribirse como

$$
\begin{aligned}
V_i - V_j - h_{12} V_k + h_{12} V_l - h_{11} I_1 &= 0 \\
I_2 &= h_{21} I_1 + h_{22}(V_k - V_l)
\end{aligned}
\tag{2.93}
$$

y que se incorporan a la matriz del sistema según

$$
\begin{array}{c} \\ i \\ j \\ k \\ l \\ \\ \text{EA1} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} V_i & V_j & V_k & V_l & I_1 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccc|c}
 & & & & 1 \\
 & & & & -1 \\
 & & h_{22} & -h_{22} & h_{21} \\
 & & -h_{22} & h_{22} & -h_{21} \\
\hline
1 & -1 & -h_{12} & h_{12} & -h_{11}
\end{array}\right]
\end{array}
\qquad (2.94)
$$

D. *Parámetros de transmisión t*

Por último, las ecuaciones que definen los parámetros de transmisión de un bipuerto son

$$
\begin{aligned}
V_1 &= AV_2 - BI_2 \\
I_1 &= CV_2 - DI_2
\end{aligned}
\qquad (2.95)
$$

cuya expresión matricial es

$$
\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \underset{\sim}{t} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}; \quad \underset{\sim}{t} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}
\qquad (2.96)
$$

que pueden escribirse como

$$
\begin{aligned}
V_i V_j - AV_k + AV_l + BI_2 &= 0 \\
I_1 &= C(V_k - V_l) - DI_2
\end{aligned}
\qquad (2.97)
$$

y que se incorporan a la matriz del sistema según

$$
\begin{array}{c} \\ i \\ j \\ k \\ l \\ \\ \text{EA1} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} V_i & V_j & V_k & V_l & I_2 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccc|c}
 & & C & -C & -D \\
 & & -C & C & D \\
 & & & & 1 \\
 & & & & -1 \\
\hline
1 & -1 & -A & A & B
\end{array}\right]
\end{array}
\qquad (2.98)
$$

### 2.4.3 Formulación matricial del Método Nodal Modificado

Las ecuaciones resultantes de aplicar el Método Nodal Modificado a un circuito se pueden expresar en forma matricial como

$$\underset{\sim}{T}\underline{X}=\underline{W} \tag{2.99}$$

donde los términos de la matriz del sistema $\underset{\sim}{T}$ son de primer grado en $s$, razón por la que puede descomponerse en la suma

$$\underset{\sim}{T}=s\underset{\sim}{C}+\underset{\sim}{G} \tag{2.100}$$

en la que $\underset{\sim}{C}$ y $\underset{\sim}{G}$ son reales.

Como consecuencia de la forma con la que los distintos tipos de elementos son procesados en el Método Nodal Modificado, la matriz $\underset{\sim}{T}$ y los vectores $\underline{X}$ y $\underline{W}$ aceptan la partición

$$\underset{\sim}{Y}=\left[\begin{array}{c|c} \underset{\sim}{Y_R} & \underset{\sim}{B} \\ \hline \underset{\sim}{C} & \underset{\sim}{D} \end{array}\right]; \quad \underline{X}=\begin{bmatrix} \underline{V}_n \\ \cdots \\ \underline{I} \end{bmatrix}; \quad \underline{W}=\begin{bmatrix} \underline{J} \\ \cdots \\ \underline{E} \end{bmatrix} \tag{2.101}$$

El vector $\underline{X}$ de variables está formado por el de tensiones nodales $\underline{V}_n$ y el de intensidades adicionales $\underline{I}$.

El vector $\underline{W}$ incorpora los valores de los generadores de entrada y los que modelan las condiciones iniciales en condensadores e inductores, cuya inclusión sólo tiene sentido en la obtención de la respuesta temporal y no deben ser tenidas en cuenta en el cálculo de la función de red, paso previo a la determinación de las características frecuenciales. El vector $\underline{J}$ agrupa las fuentes de corriente y el vector $\underline{E}$ las de tensión que sólo aparecen en las ecuaciones adicionales.

En cuanto a la matriz $\underset{\sim}{T}$, para circuitos que no incluyen bipuertos, su partición da lugar a:

1. $\underset{\sim}{Y_R}$: matriz reducida de admitancia nodal, que para circuitos de $(n+1)$ nodos es de orden $n$ y que incluye los valores de las conductancias $G$, de las transconductancias $g$ y de las admitancias $Cs$ de los condensadores. Para circuitos RCgJ coincide con la matriz de admitancia nodal.
2. $\underset{\sim}{B}$: matriz de los coeficientes de las variables adicionales en las ecuaciones KCL de los nodos del circuito. Sus términos toman los valores $\pm 1$ o 0, excepto en el caso de las fuentes de corriente controladas por corriente.
3. $\underset{\sim}{C}$ y $\underset{\sim}{D}$: matrices que incluyen los coeficientes en las ecuaciones adicionales de las tensiones de nodo y de las variables adicionales, respectivamente.

### 2.4.4 Ejemplos de aplicación

En este apartado se aplica el Método Nodal Modificado al planteamiento de las ecuaciones de varios circuitos. En cada uno de ellos se incluyen elementos

que reciben un tratamiento distinto que en el nodal, como es el caso de los inductores, o que en este método no se contempla su incorporación directa a las ecuaciones.

*Ejemplo 2.14 Circuito RLCJ.*

Se trata de aplicar el Método Nodal Modificado al circuito de la figura 2.10. La diferencia con los resultados obtenidos siguiendo el método nodal estriba en que al haber un inductor hay que plantear para él una ecuación adicional, con el fin de evitar en la matriz del sistema los términos en $s^{-1}$.

Las ecuaciones resultantes de aplicar el método nodal modificado son

$$\begin{bmatrix} C_2s+G_1 & 0 & 1 \\ 0 & C_4s+G_5 & -1 \\ 1 & -1 & -L_3s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ I_{L3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I(s)+C_2V_{c2}(0^-) \\ C_4V_{c4}(0^-) \\ -L_3i_{L3}(0^-) \end{bmatrix}$$

*Ejemplo 2.15 Circuito con una fuente de corriente controlada por corriente.*

Este ejemplo consiste en la aplicación del Método Nodal Modificado al circuito de la figura 2.13, utilizando para el transistor bipolar el modelo representado en la figura 2.14*b*. El circuito resultante se ilustra en la figura 2.77, cuyas ecuaciones son

$$\begin{bmatrix} C_1s & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1/r_i & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & C_2s & \beta & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -Ls \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ I_b \\ I_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I(s) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La cuarta y quinta fila de la matriz $\underset{\sim}{T}$ y del vector $\underline{W}$ corresponden a las ecuaciones adicionales de la fuente de corriente controlada por corriente y del inductor.

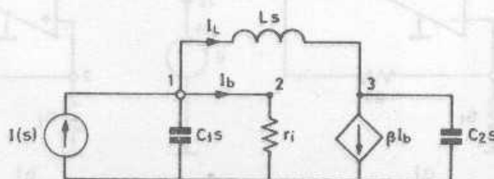



Figura 2.77 Circuito del ejemplo 2.15.

*Ejemplo 2.16   Modelo no ideal del amplificador operacional.*

Se trata de analizar los circuitos de la figura 2.78 que únicamente se diferencian en la forma de conectar las entradas del amplificador operacional.

Si para este dispositivo se utiliza el modelo ideal, los dos circuitos son indistinguibles preveyéndose que actúen como amplificadores no inversores, de amplificación igual a

$$1+\frac{G_1}{G_2}=1+\frac{R_2}{R_1}=k$$

Por el contrario, en la realidad los dos circuitos se comportan de forma muy distinta. Mientras que el representado en la figura 2.78*a* es un amplificador no inversor cuya amplificación en corriente continua es $(1+R_2/R_1)$, disminuyendo su valor con la frecuencia, el de la figura 2.78*b* es un circuito inestable que actúa como un comparador con histéresis.

El modelo del amplificador operacional con un polo real en su función de transferencia en lazo abierto explica el comportamiento del primer circuito y el carácter inestable del segundo. En efecto, aplicando el Método Nodal Modificado al circuito de la figura 2.78*a* resultan las ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & G_1+G_2 & -G_2 & 0 & 0 \\ 0 & -G_2 & G_2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & B & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ I_E \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ E \\ 0 \end{bmatrix}$$

sistema del que se obtiene la función de red

$$H(s)=\frac{V_3(s)}{E(s)}=\frac{G_1+G_2}{G_2-B(G_1+G_2)}$$

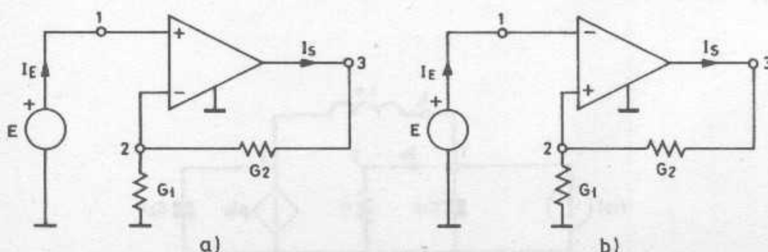



Figura 2.78   *a*) Amplificador no inversor. *b*) Comparador con histéresis.

expresión en la que sustituyendo el valor de $B$ en función de $A_0$, $\omega_c$, resulta

$$H(s)=\frac{A_0\omega_c}{s+\dfrac{G_1+(A_0+1)G_2}{G_1+G_2}\omega_c}=\frac{GB}{s+\omega_c+\dfrac{GB}{k}}$$

que corresponde a un circuito estable al tener un polo real negativo.

La amplificación en continua puede expresarse como

$$H(0)=\frac{(G_1+G_2)A_0}{G_1+(A_0+1)G_2}=\frac{GB}{\omega_c+\dfrac{GB}{k}}$$

Al tener $A_0$ un valor del orden de $10^5$, mucho mayor que la unidad, y ser $G_1$ y $G_2$ del mismo orden de magnitud, puede hacerse la aproximación

$$G_1+(A_0+1)G_2\approx A_0G_2$$

siendo la amplificación en continua

$$H(0)=\frac{G_1+G_2}{G_2}=1+\frac{G_1}{G_2}=1+\frac{R_2}{R_1}=k$$

valor que coincide con el obtenido utilizando el modelo ideal del amplificador operacional.

Por otra parte, el valor del polo de $H(s)$ es

$$s=-\frac{G_1+(A_0+1)G_2}{G_1+G_2}\omega_c\approx-\frac{G_2}{G_1+G_2}A_0\omega_c=-\frac{GB}{k}$$

por lo que a la frecuencia de corte

$$\omega_{3\text{dB}}=\frac{G_2}{G_1+G_2}A_0\omega_c=\frac{GB}{k}$$

la amplificación y la ganancia son iguales respectivamente a

$$k/\sqrt{2}\quad;\quad 20\log k-3\text{ dB}$$

Si el circuito se diseña de forma que $G_1=9G_2$ y se utiliza un amplificador operacional con $A_0=10^5$, y un producto ganancia-ancho de banda $GB$ igual a 1 MHz, la amplificación en continua es 10 y la frecuencia de corte es igual a 100 kHz. El diagrama de ganancia del circuito se representa en la figura 2.79.

En ella puede observarse que, para frecuencias de la señal de entrada inferiores a 100 kHz, el error cometido al despreciar los efectos del producto

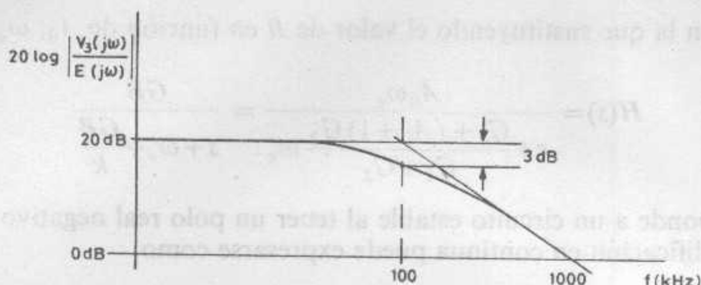



Figura 2.79 Diagrama de ganancia de Bode del amplificador no inversor.

finito ganancia-ancho de banda es menor que 3 dB. Se demuestra fácilmente que este error se reduce a 1 dB a la frecuencia de 50 kHz.

El circuito de la figura 2.78*b*, que sólo difiere del que se acaba de analizar en la forma de conectar las entradas del amplificador operacional, es inestable, como puede demostrarse aplicando el modelo con un polo real en la función de transferencia en lazo abierto. En efecto, la relación constitutiva del dispositivo es

$$-V_1+V_2+BV_3=0$$

siendo el sistema que se obtiene de aplicar el método nodal modificado

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & G_1+G_2 & -G_2 & 0 & 0 \\ 0 & -G_2 & G_2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & B & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ I_E \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ E \\ 0 \end{bmatrix}$$

que coincide con el anterior sustituyendo $B$ por $-B$.

Resolviendo para $V_3(s)$ se determina la función de red según

$$H(s)=\frac{V_3(s)}{E(s)}=\frac{G_1+G_2}{G_2+B(G_1+G_2)}$$

en la que sustituyendo $B$ por su expresión en función de $A_0$ y $\omega_c$ se transforma en

$$H(s)=-\frac{A_0\omega_c}{s-\dfrac{(A_0-1)G_2-G_1}{G_1+G_2}\omega_c}=-\frac{GB}{s+\omega_c-GB/k}$$

función de red con un polo real de valor

$$s=\frac{(A_0-1)G_2-G_1}{G_1+G_2}\,\omega_c=\frac{GB}{k}-\omega_c$$

que al ser $A_0$ mucho mayor que la unidad es positivo, lo que implica la inestabilidad del circuito, alcanzando la tensión de salida del amplificador operacional su valor de saturación, independientemente de la amplitud de la señal de entrada.

En conclusión, mientras que en el circuito de la figura 2.78*a* el efecto del producto ganancia-ancho de banda finito es la modificación de sus características frecuenciales, con efectos notables a frecuencias elevadas, en el de la figura 2.78*b*, que sólo se diferencia del anterior en la forma en que están conectadas las entradas del amplificador operacional, provoca su inestabilidad con un comportamiento absolutamente distinto al de un amplificador no inversor.

Consideraciones de otro tipo explican que este circuito actúe como un comparador con histéresis.

*Ejemplo 2.17 Control activo de tonos.*

En la figura 2.80 se representa un circuito para el control activo de tonos en amplificadores de audio. Los tonos agudos y graves pueden amplificarse independientemente actuando sobre cada uno de los potenciómetros. Con el fin de que la estructura de las ecuaciones no tenga que modificarse para las posiciones extremas, en las que se cortocircuitan algunos pares de nodos, los resistores $K_1R_2$, $(1-K_1)R_2$, $K_2R_9$ y $(1-K_2)R_9$ se incluyen en la matriz con el valor de su resistencia. Esto implica que para cada uno de ellos se tenga que formular una ecuación adicional.

En este caso, el número de ecuaciones adicionales es de seis, que corresponden a la fuente de tensión independiente $E$, a los cuatro resistores citados y al amplificador operacional, siendo las variables adicionales las corrientes en estos elementos.

Como podrá comprobar el lector, el número de ecuaciones es elevado, 15

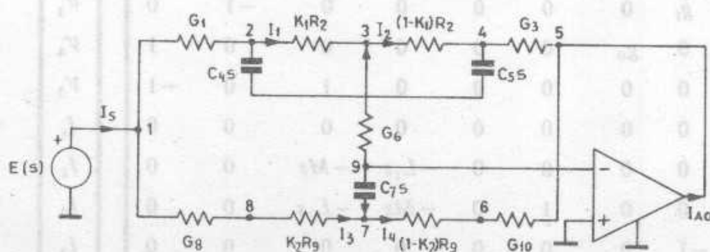



Figura 2.80 Control activo de tonos.

para un circuito de 9 nodos, y la matriz del sistema $T$ tiene un fuerte carácter disperso, 50 elementos no nulos frente a un total de 225.

Más adelante, al describir diversas aplicaciones del programa ARIADNA, se presentarán las curvas de amplificación para distintas posiciones de los potenciómetros.

*Ejemplo 2.18   Circuito con acoplamiento magnético.*

En este ejemplo se plantean las ecuaciones del circuito de la figura 2.57, resultado de sustituir en el de la figura 2.56 el transistor por su modelo de pequeña señal.

El circuito, con indicación de las variables adicionales, se muestra en la figura 2.81.

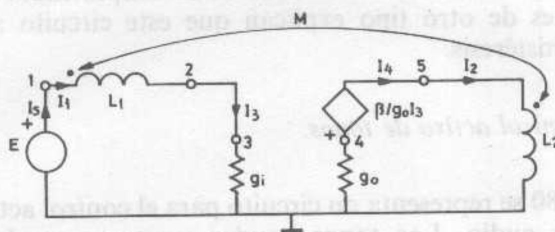



Figura 2.81   Circuito con CVT y acoplamiento magnético.

Para poder incorporar las ecuaciones de la fuente de tensión controlada por corriente, según se ha expuesto en la descripción del MNA, la corriente de control hay que definirla entre dos nodos cortocircuitados. Al estar la fuente de tensión $E$, el inductor $L$ y la conductancia $g_i$ en serie se podría haber definido una sola corriente pero, al no ser un caso general, esta forma de proceder sería difícil de traducir a un algoritmo. Las ecuaciones del circuito son

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & g_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -L_1 s & -Ms & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -Ms & -L_2 s & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -\beta/g_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ I_s \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Comparando el número de ecuaciones de este sistema con el que se había obtenido al aplicar el método de las corrientes de malla se confirma, una vez más, que el Método Nodal Modificado es poco adecuado para el análisis manual.

*Ejemplo 2.19 Simulación de un inductor con un girador.*

Se trata de caracterizar un bipuerto tal que, al conectar una impedancia $Z_L$ en el puerto de salida, la de entrada $Z_{IN}$ sea proporcional a $1/Z_L$. De esta forma se podrá simular un inductor con un condensador y, en general, cualquier elemento a partir de su dual.

Para un bipuerto cargado con una impedancia $Z_L$, según se muestra en la figura 2.82, las ecuaciones en función de los parámetros de transmisión se pueden escribir como

$$V_1 = AV_2 - BI_2$$

$$I_1 = CV_2 - DI_2$$

$$V_2 = -Z_L I_2$$

Eliminando las variables $V_2$ e $I_2$ resulta la expresión

$$Z_{IN} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{AZ_L + B}{CZ_L + D}$$

de la que se deduce que si en un bipuerto los parámetros $A$ y $D$ son nulos, la impedancia de entrada, con una impedancia $Z_L$ conectada en el puerto de salida, es proporcional a la admitancia $Y_L$, según

$$Z_{IN} = \frac{B}{CZ_L} = \frac{B}{C} Y_L$$

Un bipuerto con esta propiedad es el girador, caracterizado por el parámetro $R_g$, llamado resistencia de giración, cuya matriz de parámetros de transmisión es

$$\underset{\sim}{t} = \begin{bmatrix} 0 & \pm R_g \\ \pm 1/R_g & 0 \end{bmatrix}$$

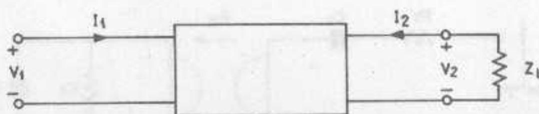



Figura 2.82 Bipuerto cargado en el puerto de salida.

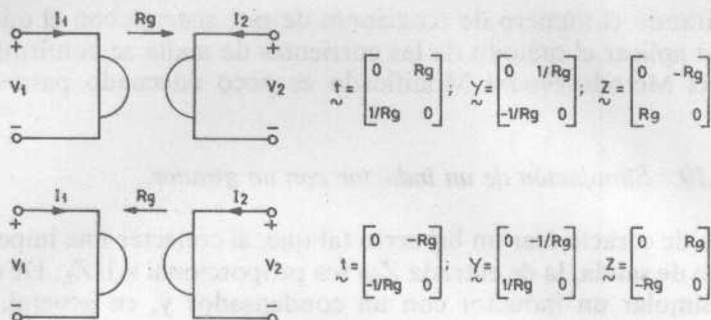



Figura 2.83 Giradores. Símbolos y parámetros.

en el que al ser nulos $A$ y $D$ se cumple que

$$Z_{IN} = \frac{B}{C}\, Y_L = R_g^2\, Y_L$$

En la figura 2.83 se ilustran los símbolos con las matrices de parámetros de los dos tipos de giradores.

En cada uno de ellos al conectar un condensador en el puerto de salida el equivalente visto desde el puerto de entrada es un inductor de inductancia igual a $R_g^2 C$, al cumplirse que

$$Z_{IN} = R_g^2\, Y_L = R_g^2 C s = L_{eq} s \qquad ; \qquad L_{eq} = R_g^2 C$$

En la figura 2.84 se muestra esta equivalencia que permite la simulación de inductores con condensadores.

Se trata ahora de determinar la impedancia de entrada $Z_{IN}$ en el circuito de la figura 2.85.

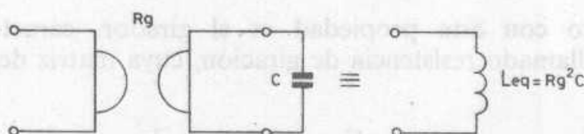



Figura 2.84 Simulación de un inductor.




Figura 2.85 Circuito con un girador.

Como al cargar un girador con un circuito el equivalente desde el puerto de entrada, salvo constantes, coincide con el dual, la conexión en paralelo del resistor $R_3$ y el condensador $C_4$ se transformará en la asociación serie de un resistor y un inductor. En efecto, su impedancia de carga $Z_L$ puede expresarse como

$$Z_L = \frac{R_3}{R_3 C_4 s + 1}$$

cuyo equivalente desde el puerto de entrada es una impedancia de valor

$$\frac{R_g^2}{Z_L} = \frac{R_g^2 (R_3 C_4 s + 1)}{R_3} = R_g^2 C_4 s + \frac{R_g^2}{R_3}$$

por lo que se cumplirá que

$$Z_{IN} = R_1 + \frac{1}{C_2 s} + \frac{R_g^2}{R_3} + R_g^2 C_4 s$$

siendo el circuito de la figura 2.85 equivalente al representado en la figura 2.86.

Al mismo resultado se habría llegado por aplicación del Método Nodal Modificado. Para ello se determinará la impedancia de entrada del circuito de la figura 2.87, definida por

$$Z_{IN}(s) = \frac{E(s)}{I_s(s)}$$

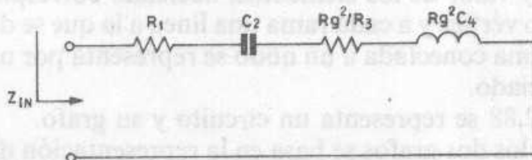



Figura 2.86 Circuito equivalente.

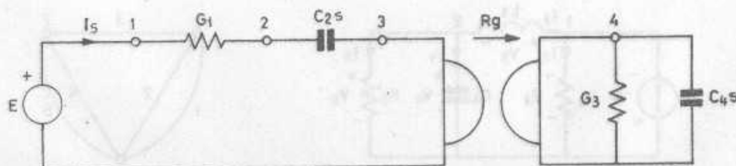



Figura 2.87 Circuito para la determinación de la impedancia de entrada.

El sistema de ecuaciones resultante de aplicar el método nodal modificado es

$$\begin{bmatrix} G_1 & -G_1 & 0 & 0 & -1 \\ -G_1 & G_1+C_2s & -C_2s & 0 & 0 \\ 0 & -C_2s & C_2s & 1/R_g & 0 \\ 0 & 0 & -1/R_g & G_3+C_4s & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ E \end{bmatrix}$$

Resolviendo para $I_s$ e invirtiendo el resultado se obtiene

$$Z_{IN}(s)= \frac{1}{C_2s} + \frac{1}{G_1} + R_g^2G_3+R_g^2C_4s = \frac{1}{C_2s} +R_1+ \frac{R_g^2}{R_3} + R_g^2C_4s$$

resultado idéntico al determinado anteriormente y que corresponde a la impedancia de entrada del circuito de la figura 2.86.

## 2.5 METODO DE LOS DOS GRAFOS

### 2.5.1 Descripción del método

Frente al Nodal Modificado, el Método de los dos grafos, que se presenta en este apartado, tiene la ventaja de que el número de ecuaciones que se obtienen en su aplicación es, en general, menor. Antes de proceder a su descripción tiene interés definir algunos conceptos básicos.

Grafo de un circuito es una representación del mismo en la que se prescinde de la naturaleza y valor de los elementos, haciendo corresponder a cada nodo un punto llamado vértice y a cada rama una línea a la que se denomina arista, de forma que una rama conectada a un nodo se representa por una arista incidente en el vértice asociado.

En la figura 2.88 se representa un circuito y su grafo.

El método de los dos grafos se basa en la representación del circuito a través de dos grafos, llamados de corriente ($I$-grafo) y de tensión ($V$-grafo), que coinciden con el que se ha definido anteriormente excepto en los siguientes

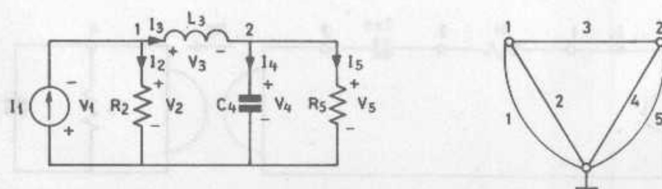



Figura 2.88 Circuito y su grafo.

casos: en el grafo de corriente se funden en uno los nodos a los que están conectadas ramas cuya intensidad no interviene en la relación constitutiva del elemento (fuentes de tensión) y se suprimen las ramas en las que la corriente es nula. En el grafo de tensión se suprimen las ramas cuya tensión no interviene en la relación constitutiva (fuentes de corriente) y se funden en uno los nodos a los que están conectadas ramas de tensión nula (cortocircuito real o virtual). En relación con el Método Nodal Modificado la diferencia estriba en que las ecuaciones KCL se plantean únicamente en los nodos del $I$-grafo y se expresan en función de las tensiones nodales definidas en el $V$-grafo.

A continuación, se describe la forma en que los elementos se incorporan a las ecuaciones del circuito. La exposición se limitará a los casos en que los resultados sean distintos a los obtenidos al aplicar el Método Nodal Modificado.

### *1. Fuente independiente de tensión*

En la figura 2.89 se representa una fuente independiente de tensión a cuyos nodos están conectadas varias admitancias, así como sus grafos de corriente y de tensión asociados.

En el grafo de corriente los nodos de la fuente de tensión se funden en uno, incorporándose a la fila correspondiente al nodo resultante, $i \equiv j$, tanto las admitancias conectadas al nodo $i$ como las que lo están al nodo $j$. Las partes de la matriz $\underline{T}$ y del vector $\underline{W}$ afectadas por los elementos representados en la figura 2.89 son

$$
\begin{array}{c}
\\
i \equiv j \\
k \\
m \\
l \\
n \\
EA
\end{array}
\overset{\underline{T}}{
\begin{array}{ccccccccccc}
i & & j & & k & & m & & l & & n \\
Y_2+Y_3 & \cdots & Y_4+Y_5 & \cdots & -Y_3 & \cdots & -Y_2 & \cdots & -Y_5 & \cdots & -Y_4 \\
-Y_3 & \cdots & & & Y_3 & \cdots & & & & \cdots & \\
-Y_2 & \cdots & & \cdots & & \cdots & Y_2 & \cdots & & \cdots & \\
 & \cdots & -Y_5 & \cdots & & \cdots & & \cdots & Y_5 & \cdots & \\
 & \cdots & -Y_4 & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & Y_4 \\
1 & \cdots & -1 & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots &
\end{array}
}
\quad
\overset{\underline{W}}{
\begin{bmatrix}
\\ \\ \\ \\ \\ E
\end{bmatrix}
}
\tag{2.102}
$$

La justificación de este procedimiento es que la fila $i \equiv j$ de la matriz $\underline{T}$ y del vector $\underline{W}$ corresponde a la suma de las ecuaciones KCL planteadas en los nodos $i$ y $j$. En efecto, dichas ecuaciones son, respectivamente

$$
\begin{gathered}
Y_2(V_i - V_m) + Y_3(V_i - V_k) = -I_E \\
Y_4(V_j - V_n) + Y_5(V_j - V_l) = I_E
\end{gathered}
\tag{2.103}
$$

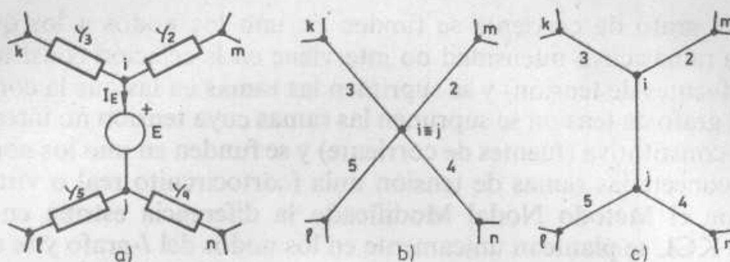



Figura 2.89 *a*) Fuente independiente de tensión. *b*) Grafo de corriente. *c*) Grafo de tensión.

de cuya suma se obtiene

$$(Y_2+Y_3)V_i+(Y_4+Y_5)V_j-Y_3V_k-Y_2V_m-Y_5V_l-Y_4V_n=0 \qquad (2.104)$$

que coincide con la ecuación representada en la fila $i \equiv j$ de la matriz $\underset{\sim}{T}$ y del vector $\underline{W}$.

Puede observarse que en el método de los dos grafos el tratamiento de la fuente independiente de tensión $E$, que puede resumirse en

$$\begin{array}{c} \qquad\qquad \underset{\sim}{T} \qquad\qquad\qquad\quad \underline{W} \\ \begin{array}{c} \\ i \equiv j \\ EA \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} i \qquad\qquad & j \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 1 & & -1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ \left[\begin{array}{c} \\ E \end{array}\right] \end{array} \end{array} \qquad (2.105)$$

exige una ecuación menos que en el nodal modificado, aunque se pierde la posibilidad de determinar el valor de su corriente $I_E$.

## 2. *Cortocircuito*

En la figura 2.90 se representa una rama en cortocircuito, así como los grafos de tensión y de corriente asociados.

Al ser las tensiones de los nodos $i$ y $j$ iguales, no aparece una de ellas como variable, por lo que la incorporación del cortocircuito a la matriz $\underset{\sim}{T}$ se hace según

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \qquad i \equiv j & \quad I_{CC} \end{array} \\ \begin{array}{c} i \\ j \end{array} \left[\begin{array}{cc} \qquad & 1 \\ & -1 \end{array}\right] \end{array} \qquad (2.106)$$

dando lugar a una ecuación menos que en el Método Nodal Modificado.

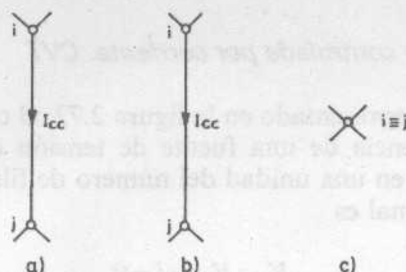



Figura 2.90 *a*) Cortocircuito. *b*) Grafo de corriente. *c*) Grafo de tensión.

### 3. *Fuente de tensión controlada por tensión. VVT*

Para la fuente de tensión controlada por tensión (figura 2.71), al igual que se hizo en el caso de la fuente independiente, se plantea una sola ecuación KCL para sus nodos, omitiéndose la variable $I_\mu$ que aparecía en el método nodal modificado. La ecuación adicional es

$$V_k - V_l - \mu V_i + \mu V_j = 0 \tag{2.107}$$

que se incorpora a la matriz $\underset{\sim}{T}$ según

$$\begin{array}{c} \\ i \\ j \\ k \equiv l \\ EA \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} i & j & k & l \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} & & & \\ & & & \\ & & & \\ -\mu & \mu & 1 & -1 \end{array}\right] \end{array} \tag{2.108}$$

### 4. *Fuente de corriente controlada por corriente. CCT*

En este elemento, representado en la figura 2.70, existe un cortocircuito en el puerto de entrada, lo que permite reducir en una unidad el número de columnas de la matriz $\underset{\sim}{T}$. La variable adicional es la corriente de control y la matriz $\underset{\sim}{T}$ resultante es

$$\begin{array}{c} \\ i \\ j \\ k \\ l \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} i \equiv j & k & l & I \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc:c} & & & 1 \\ & & & -1 \\ & & & \beta \\ & & & -\beta \end{array}\right] \end{array} \tag{2.109}$$

### 5. *Fuente de tensión controlada por corriente. CVT*

En este elemento, representado en la figura 2.72, el cortocircuito del puerto de entrada y la existencia de una fuente de tensión en el puerto de salida permiten la reducción en una unidad del número de filas y de columnas.

La ecuación adicional es

$$V_k - V_l - rI = 0 \qquad (2.110)$$

que se incorpora a la matriz $\underset{\sim}{T}$ de la forma

$$\begin{array}{c} \\ i \\ j \\ k=l \\ EA \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} i=j & k & l & I \end{array} \\ \left[ \begin{array}{ccc:c} & & & 1 \\ & & & -1 \\ \hdashline & 1 & -1 & -r \end{array} \right] \end{array} \qquad (2.111)$$

### 6. *Amplificador operacional ideal. AO*

El cortocircuito virtual que se forma en los terminales de entrada permite la reducción del número de columnas en una unidad, al igual que sucede en el caso de un cortocircuito real.

Si, además, se suprime la ecuación correspondiente al nodo al que esté conectado su terminal de salida, para un amplificador operacional con las entradas conectadas a los nodos $i$ y $j$ y la salida al nodo $k$, la estructura de la matriz $\underset{\sim}{T}$ es

$$\begin{array}{c} \\ i \\ j \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} i=j & k \end{array} \\ \left[ \begin{array}{cc} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{array} \right] \end{array} \qquad (2.112)$$

## 2.5.2 Ejemplos de aplicación

*Ejemplo 2.20 Circuito con una fuente de corriente controlada por corriente.*

En este ejemplo se trata de aplicar el método de los dos grafos al circuito de la figura 2.77, que incluye una fuente de corriente controlada por corriente. Entre los nodos 1 y 2 existe un cortocircuito, por lo que se define en ellos una sola tensión nodal como variable, resultando el sistema

$$
\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ L \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} 1{\equiv}2 & 3 & I_b & I_L \end{array} \\
\begin{bmatrix}
C_1 s & 0 & 1 & 1 \\
1/r_i & 0 & -1 & 0 \\
0 & C_2 s & \beta & -1 \\
1 & -1 & 0 & -Ls
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{bmatrix} V_1 \\ V_3 \\ I_b \\ I_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I(s) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (2.113)
$$

Estas ecuaciones se pueden obtener a partir de las planteadas al aplicar el Método Nodal Modificado. En efecto, la ecuación adicional, correspondiente al cortocircuito del puerto de entrada de la fuente controlada, implica que

$$V_1 = V_2$$

igualdad que sustituida en las restantes ecuaciones conduce al sistema (2.113).

*Ejemplo 2.21 Realización de una fuente de corriente controlada por tensión.*

Este ejemplo consiste en la aplicación del método de los dos grafos al planteamiento de las ecuaciones del circuito de la figura 2.31 utilizando para el amplificador operacional su modelo ideal.

Las tensiones de los nodos 1 y 3 son iguales, por lo que en ellos se define una sola variable. Las ecuaciones del circuito, de las que se omite la que corresponde al nodo de salida del amplificador operacional, son

$$
\begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} 1{\equiv}3 & 2 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
G_1 + G_2 & -G_2 \\
G_3 + G_4 + Y_L & -G_3
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{bmatrix} V_L \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 V_g \\ 0 \end{bmatrix}
$$

*Ejemplo 2.22. Conversor generalizado de inmitancias (GIC).*

En el circuito de la figura 2.35 la igualdad de las tensiones de los nodos de entrada de los amplificadores operacionales se traduce en la ecuación

$$V_1 = V_3 = V_5$$

Procediendo de la misma forma que en el ejemplo anterior se obtiene el sistema de ecuaciones

$$
\begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} 1{\equiv}3{\equiv}5 & 2 & 4 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
Y_1 & -Y_1 & 0 \\
Y_2 + Y_3 & -Y_2 & -Y_3 \\
Y_4 + Y_5 & 0 & -Y_4
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Con respecto al Método Nodal Modificado se han eliminado cinco variables ($V_3$, $V_5$, $I_{s1}$, $I_{s2}$, $I_{s3}$), disminuyendo el orden de la matriz del sistema desde ocho hasta tres.

*Ejemplo 2.23 Filtro de banda eliminada de segundo orden.*

Al aplicar el Método Nodal Modificado al circuito de la figura 2.34 se obtiene un sistema de once ecuaciones, de las que siete corresponden a las ecuaciones KCL en los nodos, tres a las ecuaciones adicionales de los amplificadores operacionales y una a la relación constitutiva de la fuente independiente de tensión.

Al cumplirse que

$$V_2 = V_4 = V_6 = 0$$

en el método de los dos grafos no hay que definir estas tensiones como variables. Por otra parte, al fundir en uno los nodos de la fuente independiente de tensión resulta el nodo de referencia, para el que no hay que plantear ecuación alguna. En consecuencia, por aplicación del método de los dos grafos al circuito se obtiene el sistema

$$\begin{array}{c} \\ 2 \\ 4 \\ 6 \\ EA \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 5 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -G_1 & -(G_2+C_1 s) & 0 & -G_3 \\ -G_4 & -G_7 & -G_7 & 0 \\ -G_5 & 0 & -G_6 & -C_2 s \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_3 \\ V_5 \\ V_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_{IN} \end{bmatrix}$$

en el que el número de ecuaciones se ha reducido de once a cuatro.

*Ejemplo 2.24 Circuito con acoplamiento magnético y fuente de tensión controlada por corriente.*

En este ejemplo se plantea la aplicación del método de los dos grafos al circuito de la figura 2.81, que incluye una fuente de tensión controlada por corriente (CVT) y dos inductores acoplados.

Al reunir en uno los nodos de la fuente independiente de tensión resulta el de referencia para el que no hay que plantear ninguna ecuación KCL. Por otra parte, en los nodos 2 y 3, al estar cortocircuitados, sólo hay que definir una variable de tensión. Como consecuencia de ello, las ecuaciones son las siguientes

$$
\begin{array}{l}
\\
2 \\
3 \\
4{=}5 \\
EAL1 \\
EAL2 \\
EACVT \\
EAE
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} 1 & 2{=}3 & 4 & 5 & I_1 & I_2 & I_3 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
0 & g_i & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & g_0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 0 & -L_1 s & -Ms & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -Ms & -L_2 s & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -\beta/g_0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_4 \\ V_5 \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ E \end{bmatrix}
$$

Con respecto al Método Nodal Modificado, se ha producido una disminución de tres en el número de variables y en el de ecuaciones. En efecto, no se han tenido que incluir las corrientes $I_s$ e $I_4$, ni la tensión $V_3$ como variables. Y, por otra parte, no se han planteado las ecuaciones KCL en los nodos 1 y 5, ni la ecuación adicional correspondiente al cortocircuito existente entre los nodos 2 y 3.

$$
\begin{array}{c}
\\ 2 \\ 3 \\ 4\text{-}5 \\ E4(1) \\ E4(2) \\ E4CFT \\ E4E
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} 1 & 2{=}4 & 5 & I_1 & I_2 & I_3 & \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccc}
0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
0 & g_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & g_5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 0 & -L_1 s & -sM & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -sM & -L_2 s & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -\beta g_5 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
\left[\begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_5 \\ V_? \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ E \end{array}\right]
$$

Con respecto al Método Nodal Modificado, se ha producido una disminución de tres en el número de variables y en el de ecuaciones. En efecto, no se han tenido que incluir las corrientes $I_1$ e $I_2$, ni la tensión $V_2$ como variables. Y, por otra parte, no se han planteado las ecuaciones KCL en los nodos 1 y 5, ni la ecuación adicional correspondiente al cortocircuito existente entre los nodos 2 y 4.

# Capítulo 3

# Circuitos de condensadores conmutados. Análisis frecuencial

## 3.1 INTRODUCCION

La aparición de los circuitos de condensadores conmutados [Switched-Capacitor (SC)] ha permitido resolver de forma muy eficiente el problema de la realización de filtros monolíticos para el procesado analógico de señales. En principio, los filtros clásicos RC no se adaptan convenientemente a la integración, ya que en ellos se requieren valores precisos para las constantes de tiempo, expresadas como productos RC, lo que implica la realización de resistores y condensadores con bajas tolerancias, que además deben mantener sus valores dentro de amplios márgenes de variación de la temperatura.

Los circuitos de condensadores conmutados se realizan en tecnología MOS y se basan fundamentalmente en la posibilidad de simular el comportamiento de los resistores de los circuitos RC mediante la conmutación periódica de condensadores a frecuencias elevadas respecto a las de las señales a procesar, consiguiendo así transferencias de carga que son, en cierto modo, equivalentes a las que se realizan a través de los resistores. Como se desprende de este principio, pueden sustituirse resistencias de valores incluso muy elevados, por pequeñas capacidades, reduciéndose, por tanto, espectacularmente el área de integración a utilizar, en comparación con la necesaria en la realización RC del mismo circuito. Otro aspecto notable que incide favorablemente en el comportamiento real, con relación al previsto en el diseño, es la calidad de los condensadores MOS que pueden considerarse prácticamente ideales. Por otra parte, tal como se verá más adelante, las características frecuenciales de los circuitos SC no dependen de los valores absolutos de las capacidades, sino de las relaciones entre ellas. Esta propiedad es de gran importancia ya que, por razones inherentes al proceso tecnológico, estas relaciones pueden conseguirse con mucha mayor precisión que los valores absolutos. Actualmente pueden alcanzarse tolerancias hasta del 0,3% que, además de mantenerse de forma

aceptable con la temperatura, distan considerablemente de las tolerancias que se garantizan normalmente para los valores absolutos de los parámetros.

Otro aspecto fundamental que presentan los circuitos SC, por realizarse en tecnología MOS, es la posibilidad de integrarse en un mismo dispositivo junto con otros bloques para los que se utiliza la misma tecnología, llegándose así a la implementación de sistemas monolíticos de procesado de señales capaces de combinar funciones analógicas y digitales. Un ejemplo muy notable de ello lo constituyen los codificadores-decodificadores PCM (Pulse Code Modulation) para transmisión telefónica, de los que se han descrito varias realizaciones completas en la bibliografía. En estos sistemas los filtros de antisolapamiento y alisado, necesarios en los sistemas digitales de procesado de señales analógicas, se han realizado como circuitos SC en tecnología MOS, junto con los bloques de control lógico y conversión A/D.

Aunque la mayor parte de las aplicaciones de los circuitos SC giraron inicialmente en torno a la realización de filtros y conversores A/D, pronto se desarrollaron otras posibilidades de aplicación, que en la actualidad se extienden a una gran parte de los bloques funcionales que constituyen los sistemas típicos de telecomunicación. A ello ha contribuido de forma decisiva el progresivo ensanche de la banda de frecuencias utilizable, que se ha ido alcanzando gracias a los incesantes avances en la tecnología de los procesos de integración VLSI. Así, mientras en un principio las aplicaciones de los circuitos SC estaban limitadas únicamente al margen de las frecuencias vocales, hoy día también pueden encontrarse realizaciones situadas claramente en las bandas de RF, tales como filtros de FI para receptores de radiocomunicaciones en FM, y filtros para sistemas de video.

Los circuitos SC operan esencialmente como sistemas muestreados, por lo que pueden compararse en ciertos aspectos con los filtros digitales, en la actualidad también realizables como sistemas monolíticos. Por esta razón, los filtros SC precisan también que se limite previamente la banda de frecuencias de las señales a tratar, para evitar así el solapamiento de los espectros sucesivamente desplazados inherentes al proceso de muestreo. Sin embargo, no requieren las conversiones A/D y D/A necesarias en el procesado digital de señales analógicas, por operar directamente con las muestras, lo que supone una drástica reducción en la complejidad del sistema. De todas formas, los filtros digitales presentan indiscutibles ventajas en aplicaciones en las que se requiera una fácil programabilidad o en aquellas en las que sean necesarios órdenes muy elevados. En este sentido, puede concluirse que los campos de aplicación de los dos tipos de filtros quedan bastante definidos. Así por ejemplo, los filtros digitales integrados se utilizan fundamentalmente en aplicaciones donde las señales a procesar están ya digitalizadas, o cuando se necesitan filtrados en los que sea necesario un procesado fácilmente programable. Por el contrario, suele ser preferible la utilización de filtros SC en aplicaciones en las que las señales a procesar son originalmente analógicas, por ejemplo en telefonía, radio o televisión, donde además de no requerirse órdenes muy elevados, en general no son necesarios filtros programables.

En estos útimos campos de aplicación hay otro factor importante que es el

gran volumen de producción implicado, lo que justifica también desde el punto de vista económico el desarrollo de diseños específicos. De todas formas, los filtros SC tampoco son totalmente descartables en aplicaciones donde se requiere una programabilidad dinámica. De hecho, aunque es cierto que con menor versatilidad que los filtros digitales, también pueden conseguirse realizaciones programables de interés, ya que las características de la respuesta frecuencial pueden desplazarse variando la frecuencia de conmutación, de forma análoga a lo que ocurre en los filtros digitales con la frecuencia de muestreo. Además, la implementación de condensadores en «array» de valor controlable digitalmente por un sistema de conmutadores adecuados, permite bastantes posibilidades. En la bibliografía se han descrito aplicaciones tales como sintetizadores de voz, en los que el filtro simulador del tracto vocal es un filtro SC programable dinámicamente por los parámetros asociados a cada segmento del mensaje hablado a sintetizar.

## 3.2 SISTEMAS DISCRETOS Y MUESTREADOS. CONCEPTOS FUNDAMENTALES

En los capítulos precedentes se han desarrollado métodos para el análisis de circuitos en los que las variables fundamentales involucradas, tensiones y corrientes, dependían de la variable temporal de forma continua. Por otra parte, según se vio en el capítulo 1, cuando en un circuito hay una sola excitación y las condiciones iniciales en sus elementos son nulas, se puede obtener una función de transferencia en el dominio de Laplace que relacione entre sí la excitación y la variable definida como respuesta. De esta manera, el circuito en cuestión se puede considerar, en sentido abstracto, como un sistema o transformación entre dos señales continuas y se denomina por ello sistema continuo. Existe, sin embargo, otra importante clase de sistemas que operan con señales definidas únicamente para determinados instantes de tiempo, generalmente equiespaciados: se trata de los sistemas discretos, y las señales que procesan se denominan señales discretas o secuencias. El ejemplo clásico lo puede constituir cualquiera de las aplicaciones en las que un computador digital adquiere periódicamente información de un proceso, generando al mismo tiempo una secuencia de valores de salida mediante un algoritmo determinado.

Según se verá en este capítulo, los circuitos SC también pueden caracterizarse adecuadamente utilizando sistemas discretos. Para ello, las secuencias de entrada y de salida se definen por muestreo, en instantes adecuados, sobre las tensiones del generador de entrada y la tensión nodal que se haya considerado como variable de salida, respectivamente. De hecho, estos circuitos operan directamente con las muestras extraídas de una señal continua en el tiempo, para generar una señal también continua. La modelación completa de su comportamiento precisa, por tanto, además del sistema discreto, la incorporación de ciertos bloques, encargados de realizar el muestreo de la señal de entrada y de construir la señal continua de salida a partir de la

secuencia generada por el sistema discreto. El conjunto global así constituido suele denominarse sistema muestreado.

El procesado digital de señales analógicas esencialmente responde al mismo esquema. En este tipo de aplicaciones, el sistema discreto está realizado por un computador digital junto con los bloques de conversión analógico-digital y viceversa, encargados de traducir el carácter analógico de cada muestra en información numérica y realizar el proceso inverso, respectivamente.

Estas operaciones confieren, sin embargo, ciertas características específicas a este tipo de sistemas, debido a la cuantificación que implican en los niveles de las señales tratadas.

En este punto se van a desarrollar de forma concisa los conceptos fundamentales sobre sistemas discretos y muestreados, así como las herramientas matemáticas específicas, que son imprescindibles por su aplicación directa en el estudio de los circuitos SC.

### 3.2.1 Señales y sistemas discretos. Ecuaciones en diferencias

Las señales discretas o secuencias son funciones definidas únicamente para un conjunto de valores de una variable continua. En lo sucesivo sólo van a considerarse señales discretas en el dominio temporal, definidas para el conjunto de valores $nT$, siendo $n$ cualquier número entero. $T$ es, por consiguiente, el intervalo de tiempo que separa entre sí cualquier par de muestras consecutivas y se denomina período de muestreo. En las señales discretas que se han definido, la variable independiente es en realidad $n$, por lo que suelen representarse simplemente como $x(n)$. También es frecuente la notación $x(nT)$, que se utiliza cuando se quiere representar la señal continua de la cual se obtiene por particularización la secuencia correspondiente. En la figura 3.1 pueden verse tres secuencias concretas junto con sus expresiones analíticas.

Interesa poner de manifiesto ahora una propiedad importante de la secuencia cosenoidal. Para ello se comienza analizando cierto aspecto del comportamiento de la secuencia exponencial de expresión $e^{j\omega nT}$. Esta secuencia obviamente no se modifica si se incrementa el argumento del número complejo, que representa para cada $n$, en $2\pi k$, siendo $k$ cualquier entero. De esta manera puede escribirse

$$e^{j\omega nT} = e^{j(\omega nT + \omega_s KT)} \tag{3.1}$$

siendo $\omega_s$ la frecuencia de muestreo, relacionada con $T$ según

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} \tag{3.2}$$

Como $k$ puede tomar cualquier valor entero, puede hacerse $k = \pm n$, con lo que (3.1) se transforma en

$$e^{j\omega nT} = e^{j(\omega \pm \omega_s)nT} \tag{3.3}$$

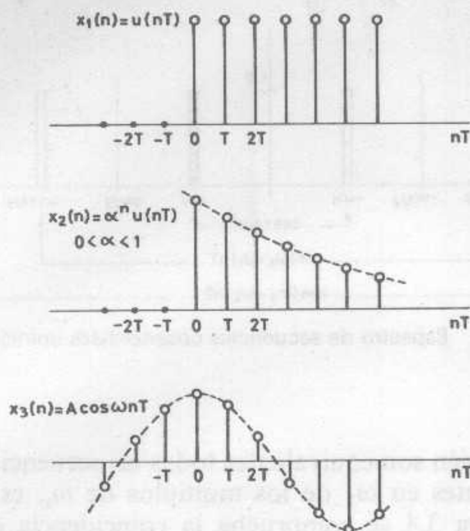



Figura 3.1 Señales discretas o secuencias.

Pudiéndose concluir que esta secuencia exponencial no se altera incrementando o decrementando su pulsación en una magnitud igual a la frecuencia de muestreo.

Si se utiliza la misma representación en el dominio de la frecuencia que para las exponenciales continuas, se tendrá que las secuencias reflejadas en la figura 3.2 son idénticas.

Teniendo en cuenta que la secuencia cosenoidal puede expresarse en función de dos secuencias exponenciales según la fórmula

$$\cos \omega_1 nT = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_1 nT} + e^{-j\omega_1 nT}\right) \quad (3.4)$$

y aplicando la conclusión anterior también a la exponencial con argumento negativo, se tendrá, tal como se ilustra en la figura 3.3, que la secuencia cosenoidal de pulsación $\omega_1$ es idéntica a otras dos secuencias cosenoidales de pulsaciones $\omega_s + \omega_1$ y $\omega_s - \omega_1$, respectivamente. De forma análoga, puede

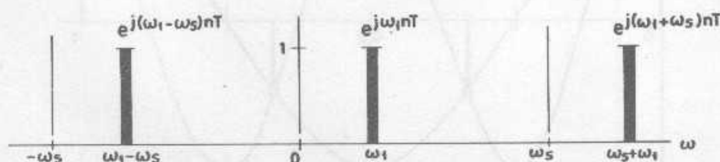



Figura 3.2 Secuencias exponenciales idénticas de distintas frecuencias.

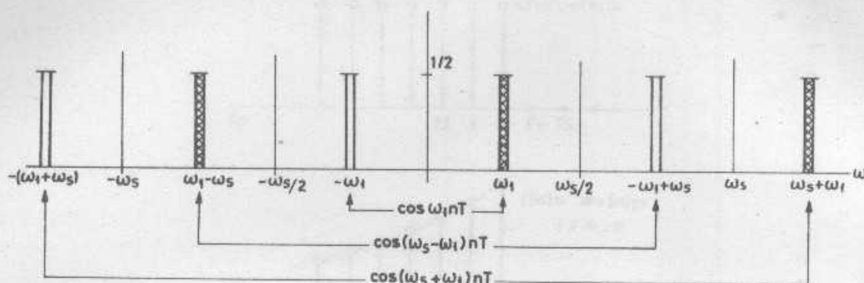



Figura 3.3 Espectro de secuencias cosenoidales coincidentes.

demostrarse que también son equivalentes todas las secuencias cosenoidales de frecuencias equidistantes en $\omega_1$ de los múltiplos de $\omega_s$, es decir, de valores $k\omega_s \pm \omega_1$. En la figura 3.4 se comprueba la coincidencia de dos secuencias cosenoidales de pulsaciones $\omega_1 = 2\pi$ y $\omega_2 = \omega_s - 2\pi$ para $\omega_s = 6\pi$.

Esta importante propiedad permite deducir que, para un valor determinado de la frecuencia de muestreo $\omega_s$, solamente pueden generarse secuencias cosenoidales distintas entre sí para el margen de frecuencias limitado superiormente por $\omega_s/2$. En efecto, según puede verse en la figura 3.3, las frecuencias $\omega_1$ y $-\omega_1 + \omega_s$, que corresponden a dos secuencias idénticas, equidistan de $\omega_s/2$. Si $\omega_1$ supera el valor de $\omega_s/2$, la frecuencia $-\omega_1 + \omega_s$ se hará menor, por lo que en el intervalo considerado habría dos secuencias iguales. La frecuencia $\omega_s/2$ se denomina frecuencia de Nyquist y surgirá de nuevo al estudiar el teorema de muestreo. Por otra parte, esta propiedad puede verse también como una consecuencia lógica de la imposibilidad de describir las oscilaciones de una señal cosenoidal leyendo sus valores instantáneos a intervalos superiores a su semiperíodo.

Un sistema discreto se define como una transformación entre una secuencia $x(nT)$, considerada como entrada y otra secuencia $y(nT)$ que constituye la salida. Se representa simbólicamente tal como se ve en la figura 3.5.

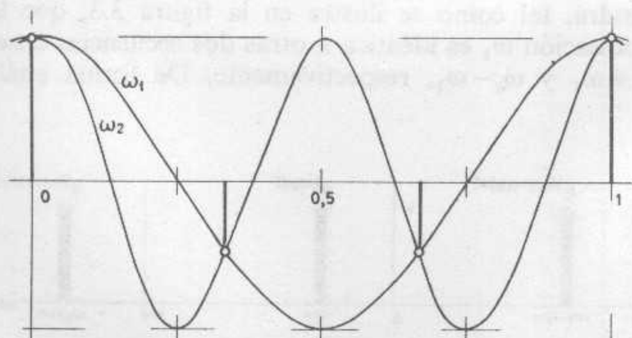



Figura 3.4 Secuencias cosenoidales coincidentes.

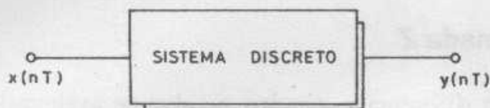


Figura 3.5 Sistema discreto.

Para los sistemas discretos son también válidas muchas de las propiedades utilizadas en los sistemas continuos, a veces con una adaptación adecuada, y que permiten su clasificación. Por ejemplo, un sistema discreto es lineal cuando se verifica

$$\alpha_1 x_1(n)+\alpha_2 x_2(n)\rightarrow\alpha_1 y_1(n)+\alpha_2 y_2(n) \tag{3.5}$$

Esta expresión indica que la secuencia del segundo miembro es la respuesta o salida del sistema correspondiente a la secuencia del primer miembro considerada como entrada, siendo además $y_1(n)$ e $y_2(n)$ las respuestas a las entradas $x_1(n)$ y $x_2(n)$ respectivamente y $\alpha_1$ y $\alpha_2$ constantes cualesquiera.

Una importante clase de sistemas discretos, dentro de los sistemas lineales, la forman aquellos cuyas transformaciones pueden representarse por ecuaciones en diferencias lineales de coeficientes constantes, cuya expresión general es

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \tag{3.6}$$

siendo $N$ el orden de la ecuación.

Esta clase de sistemas es la correspondiente a la formada por los sistemas continuos caracterizados por ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes, en la que pueden enmarcarse gran parte de los circuitos estudiados en los capítulos precedentes.

Despejando $y(n)$ en la ecuación (3.6) puede escribirse

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{a_0} y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0} x(n-k) \tag{3.7}$$

expresión que permite interpretar claramente la función del sistema, que consiste en obtener el valor de la secuencia de salida en $nT$, combinando linealmente muestras anteriores de salida y entrada junto con el valor de esta última en el mismo instante.

Las ecuaciones en diferencias tienen aplicación en el análisis de los circuitos SC. En ellos se realizan intercambios de carga entre distintos condensadores, que se producen periódicamente, y pueden considerarse prácticamente instantáneos al no haber más elementos resistivos que las resistencias de los conmutadores. Las ecuaciones de equilibrio a plantear en función de las tensiones deben responder a balances globales de carga entre intercambios consecutivos y, por tanto, las ecuaciones en diferencias surgen de forma natural.

### 3.2.2 La transformada Z

Las ecuaciones en diferencias pueden resolverse aplicando procedimientos similares a los utilizados en la resolución de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Sin embargo, resulta aquí también de gran utilidad la aplicación de un método, paralelo al que se sigue en el análisis de los sistemas continuos con la transformada de Laplace, que permita transformar las ecuaciones de diferencias en ecuaciones algebraicas, de más fácil manipulación. De esta forma, se consigue asignar igualmente a los sistemas discretos funciones de transferencia que relacionan entre sí las secuencias de entrada y de salida en el dominio transformado de la nueva variable.

La transformada $Z$ de una secuencia $x(n)$ se representa por $X(z)$ y se define por la expresión

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\, z^{-n} \tag{3.8}$$

para todos los valores de la variable compleja $z$ en los que converge. Según esta definición, sólo es aplicable a secuencias que existan para $n \geqslant 0$ de la misma manera que la transformada de Laplace, descrita en el capítulo 1, se utiliza únicamente con funciones definidas para $t \geqslant 0$.

*Ejemplo 3.1.*

Se trata de calcular la transformada $Z$ de la secuencia

$$x(n) = \alpha^n u(nT)$$

Aplicando la definición (3.8) se tendrá

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n$$

que es la suma de los términos de una serie geométrica de razón $\alpha z^{-1}$ y primer término unidad, por lo que finalmente se obtiene el resultado

$$x(z) = \frac{z}{z-\alpha}$$

que es válido para $|z| > |\alpha|$, condición que asigna como región de convergencia en el plano $z$, el exterior del círculo de radio $|\alpha|$.

En la tabla 3.1 se han agrupado las transformadas $Z$ de algunas de las secuencias frecuentemente utilizadas. La obtención de la primera es inmediata, la segunda es un caso particular del resultado del ejemplo1 para $\alpha = 0$, y las

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $\delta(nT)$ | 0 T | $1$ |
| 2 | $u(nT)$ | 0 T | $\dfrac{z}{z-1}$ |
| 3 | $\alpha^n u(nT)$ | 0 T | $\dfrac{z}{z-\alpha}$ |
| 4 | $\cos \omega nT\, u(nT)$ | 0 T | $\dfrac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-(2\cos\omega T)z+1}$ |
| 5 | $\operatorname{sen} \omega nT\, u(nT)$ | 0 T | $\dfrac{z \operatorname{sen}\omega T}{z^2-(2\cos\omega T)z+1}$ |
| 6 | $e^{-\alpha nt}\cos(\omega nT)u(nT)$ | 0 T | $\dfrac{z(z-e^{-\alpha T}\cos\omega T)}{z^2-2ze^{-\alpha T}\cos\omega T+e^{-2\alpha T}}$ |
| 7 | $e^{-\alpha nt}\operatorname{sen}\omega nTu(nT)$ | 0 T | $\dfrac{z\, e^{-\alpha T}\operatorname{sen}\omega T}{z^2-2ze^{-\alpha T}\cos\omega T+e^{-2\alpha T}}$ |

Tabla 3.1 Transformadas *Z*.

cuatro últimas pueden obtenerse generalizando el mismo resultado para constantes complejas.

La transformada $Z$ es claramente lineal pues, como puede comprobarse fácilmente, de su definición se desprende

$$Z[\alpha_1 x_1(n)+\alpha_2 x_2(n)] = \alpha_1 X_1(z) + \alpha_2 X_2(z) \tag{3.9}$$

Se trata ahora de ver el efecto que tiene el retardo de $T$ segundos producido en una secuencia sobre su transformada. Para ello, aplicando de nuevo la definición (3.8) a la secuencia $x(n-1)$, se obtiene

$$Z[x(n-1)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n-1)z^{-n} \quad (3.10)$$

y teniendo en cuenta que $x(-1)=0$ resulta

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(n-1)z^{-n} = \sum_{n'=0}^{\infty} x(n')z^{-1}z^{-n'} \quad (3.11)$$

siendo $n'=n-1$, con lo que extrayendo finalmente el factor $z^{-1}$ del sumatorio se obtiene

$$Z[x(n-1)] = z^{-1}X(z) \quad (3.12)$$

Es decir, el retardo de una unidad en el dominio de la variable discreta equivale a la multiplicación por $z^{-1}$ en el dominio transformado. Este resultado es generalizable de forma inmediata para retardos de $kT$ segundos, teniéndose

$$Z[x(n-k)] = z^{-k}X(z) \quad (3.13)$$

expresión que también es válida para obtener la transformada de una secuencia adelantada en $kT$, suponiendo que $x(n)=0$ para $n=0,1...k-1$, sin más que cambiar el signo de $k$.

Esta propiedad de la transformada $Z$ es paralela a la que permitía obtener en los sistemas continuos la transformada de Laplace de la derivada de una función y, junto con la linealidad, es la clave para la transformación de las ecuaciones en diferencias en simples ecuaciones algebraicas.

La transformada $Z^{-1}$ permite recuperar la secuencia a partir de su transformada. Su expresión matemática es

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1}dz \quad (3.14)$$

donde $C$ indica un contorno de integración que incluye todas las singularidades de la función $X(z)$.

En la práctica, sin embargo, es preferible la utilización de métodos similares a los utilizados en la transformación inversa de Laplace, consistentes en descomponer la transformada inicial en funciones simples cuyas transformadas inversas sean conocidas.

*Ejemplo 3.2.*

Se propone obtener la transformada inversa de la función

$$x(z) = \frac{z(7z-8)}{z^2-5/2z+1}$$

El denominador tiene dos ceros reales iguales a 1/2 y 2 respectivamente, por lo que la descomposición en fracciones simples, separando previamente el factor $z$ del numerador, va a conducir a expresiones similares a la transformada 3 de la tabla 3.1. Sin embargo, suele ser frecuente tratar con polinomios en $z^{-1}$, porque la transformación de muchas de las ecuaciones en diferencias, tal como se verá, conducen a ello. De esta manera $X(z)$ puede reescribirse y descomponerse según

$$X(z)=\frac{7-8z^{-1}}{1-5/2z^{-1}+z^{-2}}=\frac{A_1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{A_2}{1-2z^{-1}}$$

con

$$A_1=X(z)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\Big|_{z=1/2}=3$$

y

$$A_2=X(z)\ (1-2z^{-1})\ \Big|_{z=2}=4$$

por lo que finalmente

$$x(nT)=[3(1/2)^n+4.2^n]u(nT)$$

### 3.2.3 Función de transferencia y estabilidad

Se considera un sistema discreto cuyo comportamiento esté descrito por una ecuación en diferencias del tipo (3.6). Si se supone $a_0=1$, sin perder con ello generalidad, y se aplica la transformada $Z$ a (3.7), teniendo en cuenta su linealidad y la propiedad descrita por (3.13) sobre la transformada de una secuencia retardada, se obtiene la ecuación algebraica siguiente:

$$Y(z)=-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}\,Y(z)+\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}X(z) \tag{3.15}$$

Despejando ahora la transformada de la secuencia de salida $Y(z)$ se llega al resultado

$$Y(z)=H(z)X(z) \tag{3.16}$$

donde

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \tag{3.17}$$

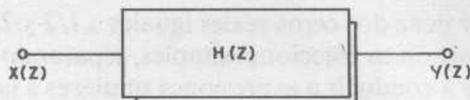



Figura 3.6 Sistema discreto en el dominio transformado.

En conclusión, el sistema discreto puede caracterizarse por una función de transferencia $H(z)$ que relaciona entre sí las secuencias transformadas de entrada y de salida, tal como se representa simbólicamente en la figura 3.6.

Se propone ahora la obtención de la respuesta de un sistema con función de transferencia $H(z)$ a la secuencia de entrada $\delta(nT)$ definida en la tabla 3.1. Teniendo en cuenta (3.16) y que la transformada $Z$ de esta secuencia es la unidad, se tendrá que tal respuesta es simplemente la transformada inversa de la función de transferencia y, por ello, se designa por $h(nT)$. Es decir,

$$Z[h(nT)] = H(z) \tag{3.18}$$

Esta respuesta se denomina respuesta impulsional por analogía con los sistemas continuos.

Para obtener $h(nT)$, se procede a la factorización del denominador de (3.17), pudiéndose escribir

$$H(z) = \frac{N(z^{-1})}{(1-\alpha_1 z^{-1})(1-\alpha_2 z^{-1}) \dots (1-\alpha_N z^{-1})} \tag{3.19}$$

siendo $\alpha_i$ los polos de la función de transferencia.

Seguidamente se va a estudiar la forma de las componentes de $h(nT)$ asociadas a cada uno de los polos dependiendo de su localización en el plano $z$.

*a) Polos reales*

Según el resultado 3 de la tabla 3.1, cada polo real $\alpha_i$ producirá una componente exponencial de la forma

$$A_i \alpha_i^n u(nT) \tag{3.20}$$

cuyo módulo crecerá o decrecerá según sea $|\alpha_i|$ mayor o menor que la unidad, respectivamente. Como casos límite, si $\alpha_i = 1$ la secuencia será simplemente $A_i u(nT)$ y si $\alpha_i = -1$, se irán produciendo alternativamente los valores $\pm A_i$.

*b) Polos complejos conjugados*

Para cada par de polos $r_i e^{\pm j\Omega}$, si se consideran de la misma forma que los polos reales en la descomposición de (3.19), se tendrán dos residuos que serán

también un par de números complejos conjugados expresables por $Ae^{\pm j\varphi}$ Teniendo en cuenta esta propiedad y generalizando la transformada $Z$ de la secuencia exponencial para bases complejas puede escribirse

$$\frac{Ae^{j\varphi}}{1-re^{j\Omega}z^{-1}} \xrightarrow{Z^{-1}} Ar^n e^{j(\Omega n+\varphi)}u(nT)$$

$$\frac{Ae^{-j\varphi}}{1-re^{-j\Omega}z^{-1}} \xrightarrow{Z^{-1}} Ar^n e^{-j(\Omega n+\varphi)}u(nT) \tag{3.21}$$

Sumando estos dos resultados parciales se obtiene finalmente

$$2Ar^n \cos(\Omega n+\varphi)\, u(nT) \tag{3.22}$$

Se trata de una secuencia cosenoidal afectada por una exponencial, cuyo crecimiento o decrecimiento depende de la situación de los polos respecto a un círculo de radio unidad centrado en el origen, que se denomina círculo unitario. En efecto, si se encuentran en el exterior se tendrá $r>1$, por lo que la amplitud será creciente; mientras que si están en el interior, $r<1$, siendo la amplitud entonces decreciente. Por último, si los polos se encuentran sobre la circunferencia, $r=1$, la secuencia que resulta es simplemente una cosenoide.

Como se observa en la expresión (3.22), el argumento $\Omega$, correspondiente al par de polos considerados, actúa como frecuencia angular en la cosenoide y representa el número de radianes que avanza esta cosenoide entre muestras consecutivas. Al referir la secuencia al eje de tiempos mediante el período de muestreo, se tendrá que

$$\omega=\Omega/T \tag{3.23}$$

es la correspondiente frecuencia expresada en rad/s. Según esto, la circunferencia de radio unidad de la figura 3.7 puede escalarse en frecuencia para el intervalo $(-\pi,\pi)$ de $\Omega$ que corresponderá, según (3.23), al intervalo $(-\pi/T,\pi/T)$ o $(-\omega_s/2,\omega_s/2)$ cuyos límites coinciden con la frecuencia de Nyquist mencionada en 3.2.1.

En la figura 3.7 se resumen las conclusiones anteriores para los casos *a*) y *b*).

Si se plantease ahora el problema de calcular la respuesta del sistema a una excitación cualquiera mediante (3.16), en la descomposición en fracciones simples del producto del segundo miembro, surgirán términos asociados a los polos de $H(z)$ de igual forma que los obtenidos en la respuesta impulsional y otros adicionales que dependerían del tipo de excitación. Los primeros constituyen la componente libre de la respuesta del sistema y el resto corresponden a la componente forzada, como se ve, en una estrecha relación con el comportamiento de los sistemas continuos.

La obtención de la respuesta del sistema a una secuencia $x(n)$ puede observarse desde otro punto de vista relacionado con la respuesta impulsional. En efecto, cualquiera de las muestras $x(k)$ de $x(n)$ puede ser considerada como

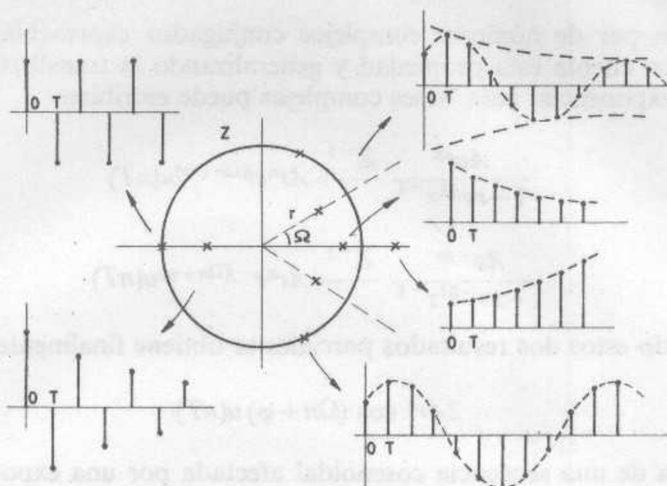


Figura 3.7 Componentes de la respuesta impulsional.

una secuencia $\delta(n-k)$ ponderada por $x(k)$. Basándose en esta interpretación, y teniendo en cuenta la linealidad del sistema y su invariancia temporal, puede escribirse

$$y(n)=\sum_{k=0}^{n} x(k)h(n-k) \tag{3.24}$$

Es decir, la señal de salida puede expresarse como la superposición de respuestas impulsionales sucesivamente desplazadas y multiplicadas por la correspondiente muestra de la señal de entrada.

Este resultado se denomina suma de convolución y tiene un significado comparable al de la integral de convolución en los sistemas continuos.

Siguiendo con el paralelismo entre los dos tipos de sistemas, la estabilidad en los sistemas discretos se define de la forma siguiente:

Un sistema es estable cuando para cualquier secuencia de entrada $x(n)$ acotada responde con una secuencia $y(n)$ también acotada.

Haciendo el cambio $k'=n-k$ para la variable de suma en (3.24) se obtiene la expresión equivalente

$$y(n)=\sum_{k=0}^{n} x(n-k)h(k) \tag{3.25}$$

con lo que se verifica

$$|y(n)|\leqslant \sum_{k=0}^{n} |x(n-k)|\,|h(k)| \tag{3.26}$$

y si $|x(n)| < M$ para todo $n$ se tendrá

$$|y(n)| \leqslant M \sum_{k=0}^{k} |h(n)| \tag{3.27}$$

que relaciona la estabilidad del sistema, según la definición que se ha hecho, con la convergencia del sumatorio del segundo miembro.

Es fácil demostrar, basándose en la variación exponencial de las componentes de $h(n)$, que si $h(n)$ tiende a cero cuando $n$ tiende a infinito, el sumatorio de (3.27) converge y, por tanto, el sistema es estable. Para ello basta imponer la condición de que los polos de $H(z)$ estén en el interior del círculo unitario. Por otra parte, tal como se ha visto, si hay polos en el exterior de este círculo, hay componentes de $h(n)$ crecientes exponencialmente que conducen a un sistema inestable. Por último, puede demostrarse que si hay polos situados sobre la circunferencia de radio unidad, siempre se puede encontrar una secuencia de entrada que produzca una respuesta no acotada.

En resumen, puede concluirse que un sistema discreto es estable únicamente si todos los polos de su función de transferencia están en el interior del círculo unitario.

Como puede verse, existe una clara correspondencia entre las dos regiones en que la circunferencia de radio unidad divide al plano $z$, y las dos regiones en que el eje imaginario divide al plano $s$ en los sistemas continuos, en relación con la respuesta y, por tanto, con la estabilidad.

### 3.2.4 Respuesta en frecuencia

El primer objetivo de este apartado es la obtención de la componente forzada de la respuesta de un sistema discreto estable, caracterizado por una función de transferencia $H(z)$, cuando se excita con una secuencia cosenoidal. Para ello resulta conveniente obtener, en primer lugar, la respuesta a una excitación exponencial de la forma $e^{j\omega nT}$.

Teniendo en cuenta el resultado 3 de la tabla 3.1 y aplicando la expresión (3.16) puede escribirse

$$Y(z) = H(z)\,\frac{1}{1-e^{j\omega T}z^{-1}} = \frac{A_1}{1-\alpha_1 z^{-1}} + \ldots + \\ + \frac{A_N}{1-\alpha_N z^{-1}} + \frac{k}{1-e^{j\omega T}z^{-1}} \tag{3.28}$$

donde las $N$ primeras fracciones corresponden a la respuesta libre y la última a la componente forzada que trata de obtenerse.

Aplicando el procedimiento ya utilizado en el ejemplo 3.2 para el cálculo de los residuos se llega a

$$y_f(nT) = H(e^{j\omega T})e^{j\omega nT} \tag{3.29}$$

Procediendo de la misma manera para la secuencia exponencial $e^{-j\omega nT}$ y sumando los resultados se desprende la conclusión de que para la excitación cosenoidal

$$x(n) = A \cos(\omega nT + \varphi) \tag{3.30}$$

se obtiene una componente forzada de expresión

$$y_f(n) = A|H(e^{j\omega T})| \cos[\omega nT + \varphi + \arg H(e^{j\omega T})] \tag{3.31}$$

Tal como se ve en (3.29) y (3.31), se pone de manifiesto que la función $H(e^{j\omega T})$ en los sistemas discretos realiza el mismo papel que la función $H(j\omega)$ en los sistemas continuos: su módulo y su argumento son la amplificación y el desfase, respectivamente, para cada frecuencia. La respuesta en frecuencia de un sistema discreto queda determinada, pór tanto, particularizando su función de transferencia sobre la circunferencia unitaria. Esta propiedad completa la correspondencia entre el plano $z$ y el plano $s$ en lo referente a la frontera sobre las dos regiones en que se divide cada plano: la circunferencia unitaria tiene el mismo significado en el plano $z$ que el eje $j\omega$ en el plano $s$.

Por otra parte, la función $H(e^{j\omega T})$ es obviamente periódica, con período $2\pi/T$ igual a la frecuencia de muestreo, lo que concuerda con el margen de frecuencias limitado por la frecuencia de Nyquist. Es decir, la respuesta en frecuencia en intervalos de amplitud $\omega_s$ es la misma porque las secuencias exponenciales complejas de la forma $e^{j\omega nT}$ con frecuencias que se diferencian en $\omega_s$ son idénticas.

Puede conseguirse una representación cualitativa de la curva de amplificación interpretando geométricamente la particularización de $|H(z)|$ en los puntos de la circunferencia unitaria, según se ilustra en la figura 3.8. La superficie representada en *b*) corresponde a la función $|H(z)|$, por lo que la curva de amplificación se obtendrá cortando esta superficie por el cilindro levantado perpendicularmente sobre la circunferencia unitaria. Así, puede observarse que la proximidad de los polos provocará elevaciones en la traza resultante, mientras que la de los ceros producirá depresiones. Es evidente que los efectos serán tanto más pronunciados cuanto más cerca de la circunferencia se encuentren las singularidades.

Interesa ahora encontrar una representación de las secuencias $x(nT)$ e $y(nT)$ en el dominio de la frecuencia para poderlas relacionar entre sí a través de $H(e^{j\omega T})$.

La transformada de Fourier de una secuencia se define por

$$X(e^{j\omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-j\omega nT} \tag{3.32}$$

expresión que puede derivarse a partir de la correspondiente a la transformada $Z$, extendiendo el sumatorio a $-\infty$ (transformada $Z$ bilateral) y sustituyendo

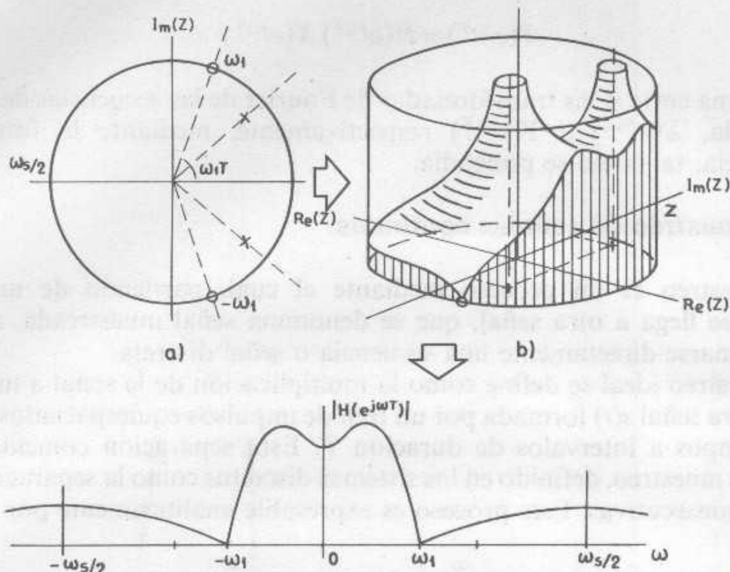



Figura 3.8 Trazado de la curva de amplificación.

la variable por $e^{j\omega T}$, por lo que resulta una función periódica. De forma equivalente se relacionaban las transformadas de Fourier y Laplace para señales continuas.

La expresión (3.32) puede considerarse como el desarrollo en serie de Fourier de la función $X(e^{j\omega T})$ en la variable frecuencia[1], lo que concuerda con el carácter periódico de la misma. Teniendo en cuenta que el período es $\omega_s$, los coeficientes del desarrollo vendrán dados por

$$x(nT)=\frac{T}{2\pi}\int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} X(e^{j\omega T})e^{j\omega nT}d\omega \tag{3.33}$$

resultado que se puede considerar como la transformada inversa de Fourier para secuencias. Esta expresión también puede ser interpretada como el límite de un sumatorio de secuencias exponenciales de amplitudes

$$\frac{T}{2\pi}\,X(e^{j\omega T})d\omega \tag{3.34}$$

dentro del margen $(-\omega_s/2,\omega_s/2)$ que corresponden a las secuencias no redundantes.

Basándose en esta interpretación, si se supone un sistema con función de transferencia $H(z)$, aplicando (3.29) y teniendo en cuenta su linealidad se obtiene el importante resultado

$$Y(e^{j\omega T}) = H(e^{j\omega T})\, X(e^{j\omega T}) \qquad (3.35)$$

que relaciona entre sí las transformadas de Fourier de las secuencias de entrada y de salida, $X(e^{j\omega T})$ e $Y(e^{j\omega T})$ respectivamente, mediante la función de transferencia, tal como se pretendía.

### 3.2.5 Muestreo de señales continuas

El muestreo es un proceso mediante el cual, partiendo de una señal continua, se llega a otra señal, que se denomina señal muestreada, a la que puede asignarse directamente una secuencia o señal discreta.

El muestreo ideal se define como la multiplicación de la señal a muestrear $x(t)$ por otra señal $s(t)$ formada por un tren de impulsos equiespaciados sobre el eje de tiempos a intervalos de duración $T$. Esta separación coincide con el período de muestreo, definido en los sistemas discretos como la separación entre muestras consecutivas. Este proceso es expresable analíticamente por

$$x^*(t) = x(t)s(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT) \qquad (3.36)$$

donde $x^*(t)$ es la señal muestreada y consiste en una secuencia de impulsos ponderados por los valores de $x(t)$ en los instantes $kT$. El muestreo puede interpretarse, por consiguiente, como una modulación realizada por $x(t)$ sobre la función $s(t)$, y puede asociarse una señal discreta a $x^*(t)$ que tenga como muestras los pesos respectivos de los impulsos. El proceso seguido se ilustra en la figura 3.9.

El estudio de las repercusiones del muestreo sobre el espectro de las señales continuas tiene importancia de cara a la utilización de los sistemas discretos para su procesado. Se pretende ahora, por tanto, obtener el espectro de la señal muestreada y relacionarlo con el correspondiente a la señal $x(t)$.

Para ello, se observa, que al ser $s(t)$ una función periódica, puede desarrollarse en serie de Fourier, por lo que aplicando la propiedad

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(t)\delta(t)dt = f(0) \qquad (3.37)$$

al cálculo de los coeficientes de su desarrollo, se obtiene de forma inmediata el resultado

$$s(t) = \frac{1}{T}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \cos k\omega_s t\right] \qquad (3.38)$$

por lo que

$$x^*(t) = \frac{1}{T}\left[x(t) + 2\sum_{k=1}^{\infty} x(t) \cos k\omega_s t\right] \qquad (3.39)$$

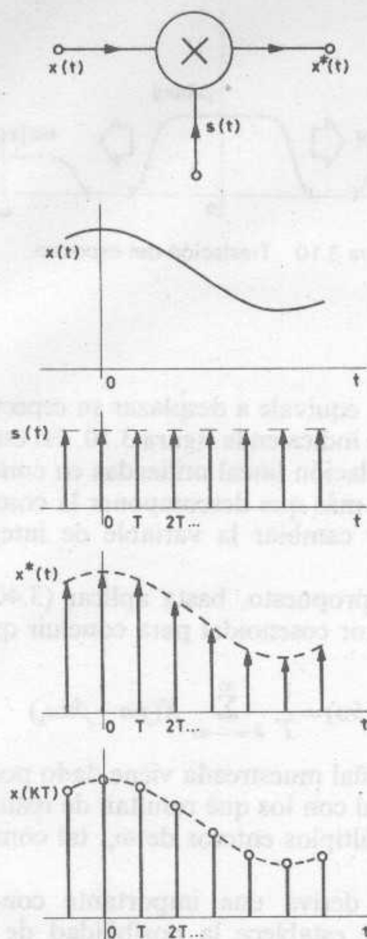


Figura 3.9 Muestreo ideal.

Es decir, la señal muestreada se obtiene sumando $x(t)$ con las resultantes de modular, con ella misma, señales cosenoidales con amplitud 2 de todas las frecuencias multiplos de la frecuencia de muestreo y dividiendo por $T$.

Una importante propiedad de la transformada de Fourier establece que

$$\mathcal{F}[x(t)\cos\omega_0 t]=\frac{1}{2}[X(j\omega-j\omega_0)+X(j\omega+j\omega_0)] \tag{3.40}$$

siendo

$$X(j\omega)=\mathcal{F}[x(t)]$$

Lo que significa que multiplicar en el dominio del tiempo una señal por una

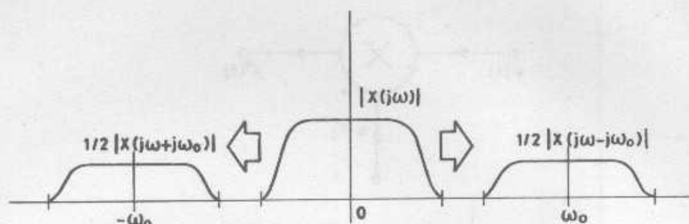


Figura 3.10 Traslación del espectro.

cosenoide de frecuencia $\omega_0$ equivale a desplazar su espectro en $\omega_0$ y dividir su amplitud por 2, tal como se indica en la figura 3.10. En esta propiedad se basan todas las técnicas de modulación lineal utilizadas en comunicaciones, y puede demostrarse fácilmente sin más que descomponer la cosenoide como suma de exponenciales complejas y cambiar la variable de integración al aplicar la transformada de Fourier.

Volviendo al objetivo propuesto, basta aplicar (3.40) a cada uno de los términos de (3.39) con factor cosenoidal para concluir que

$$X^*(j\omega)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j\omega-jk\omega_s) \tag{3.41}$$

Así, el espectro de la señal muestreada viene dado por la superposición del espectro de la señal original con los que resultan de realizar sobre él sucesivos desplazamientos, según múltiplos enteros de $\omega_s$, tal como se representa en la figura 3.11.

De este resultado se deriva una importante conclusión, denominada teorema de muestreo, que establece la posibilidad de recuperar una señal continua a partir de la correspondiente señal muestreada, siempre que se cumpla la condición

$$|x(j\omega)|=0 \qquad \text{para} \qquad |\omega|\geqslant\frac{\omega_s}{2} \tag{3.42}$$

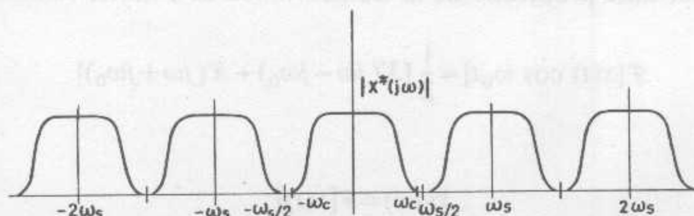


Figura 3.11 Espectro de una señal muestreada.

es decir, siempre que el margen de frecuencias, necesario para representar la señal, esté limitado por la frecuencia de Nyquist. O, dicho de otra manera, siempre que se muestree a una frecuencia que por lo menos duplique el límite de la banda de frecuencias que la señal ocupa.

En la figura 3.11 se aprecia claramente que si se cumple (3.42), basta aplicar un filtro de paso bajo a la señal muestreada para recuperar la señal original. Por el contrario, si no se cumple esta condición, se produce el solapamiento parcial de los espectros desplazados, tal como se ve en la figura 3.12, lo que imposibilita la recuperación.

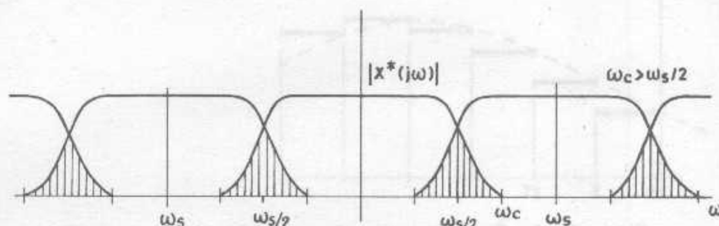



Figura 3.12 Solapamiento de espectros.

El teorema de muestreo tiene una interpretación clara: tomando muestras de una señal a intervalos de $T$ segundos, no pueden reflejarse sus variaciones cosenoidales que contengan más de un semiperíodo en esos intervalos, pues para poner de manifiesto que una señal está oscilando se requieren por lo menos dos muestras por período.

El muestreo ideal, según se ha definido, tiene un carácter fundamentalmente teórico. Desde el punto de vista práctico, interesa utilizar otra señal muestreada que permita un manejo más fácil y se adapte mejor a los sistemas reales de procesado. Por ejemplo, cuando se trata de realizar una conversión A/D, se requiere que a la entrada del conversor se mantenga constante una tensión de valor proporcional al de la muestra a digitalizar, al menos durante un intervalo igual al tiempo de conversión característico del dispositivo utilizado. Por ello, resulta conveniente definir la nueva señal muestreada como la que resulta de mantener durante un cierto intervalo el valor de la señal a muestrear en cada instante $kT$. Cuando el intervalo de mantenimiento coincide con el período de muestreo, que es el caso más frecuente, la señal que se obtiene, representada en la figura 3.13, se denomina señal muestreada y retenida (S/H) de orden cero, y se va a designar por $\bar{x}(t)$.

En la figura 3.14 puede verse el diagrama de un circuito para realizar el muestreo y retención de la señal $v(t)$. Se trata realmente de un circuito SC. Su comportamiento se comprende fácilmente teniendo en cuenta el control de los conmutadores indicado.

Para interpretar su efecto desde el punto de vista frecuencial, el muestreo y

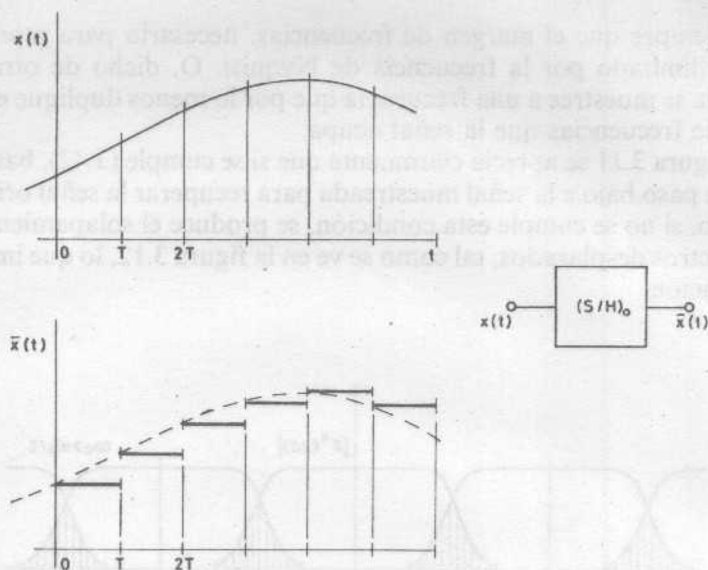


Figura 3.13 Señal muestreada y retenida de orden cero.

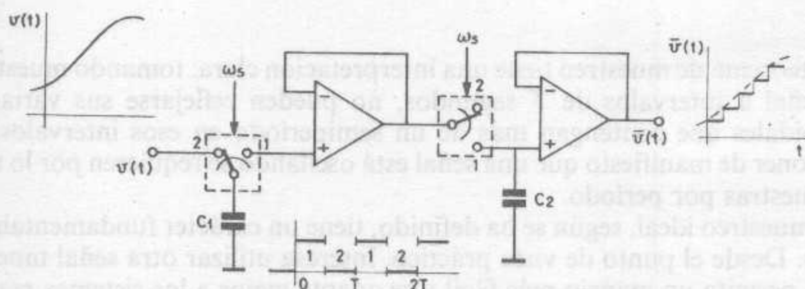


Figura 3.14 Circuito S/H de orden cero.

retención puede imaginarse como el resultado de aplicar la señal a un muestreador ideal, seguido de un bloque cuya respuesta impulsional sea un pulso rectangular de amplitud unidad y duración $T$, según se ve en la figura 3.15.

De esta manera se tendrá que la función de transferencia del nuevo bloque, caracterizado por $h_r(t)$, vendrá dada por

$$H_r(j\omega)=\mathcal{F}[h_r(t)]=\frac{2\,\mathrm{sen}\,(\omega T/2)}{\omega}\,e^{-j\omega T/2} \tag{3.43}$$

y teniendo en cuenta (3.41) se tendrá

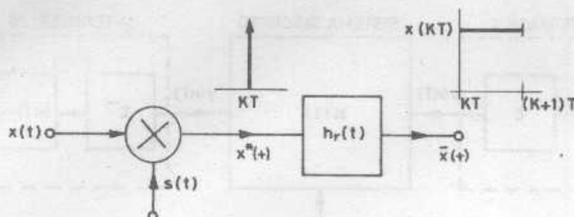


Figura 3.15 Relación entre muestreo ideal y S/H.

$$\bar{X}(j\omega)=\frac{1}{T}\, H_r(j\omega) \sum_{-\infty}^{\infty} X(j\omega-jk\omega_s) \qquad (3.44)$$

En la figura 3.16 se muestra el efecto producido por el bloque de retención sobre el espectro de amplitud de la señal muestreada. Como puede verse, la repercusión sobre la banda de frecuencias en torno al cero no es muy importante, mientras que en el resto tiende a eliminar los espectros desplazados, contribuyendo así a reconstruir la señal $x(t)$. Por otra parte, la fase lineal de (3.43), equivalente a un retardo de $T/2$, tiene una fácil interpretación sobre la figura 3.13 si se pretende aproximar la señal $x(t)$ por $\bar{x}(t)$.

### 3.2.6 Procesado de señales continuas. Sistemas muestreados

Se trata ahora de estudiar la aplicación de los sistemas discretos en el procesado de señales continuas. Esta posibilidad viene sugerida por el teorema de muestreo, ya que según este resultado se puede describir una señal de banda limitada sólo por sus muestras, con la única condición de utilizar una frecuencia de muestreo adecuada.

En la figura 3.17 se representa el diagrama de bloques que inicialmente puede responder al objetivo propuesto. Los bloques de interfase de entrada y de salida tienen como finalidad realizar las transformaciones entre señales continuas y discretas, directa o inversa respectivamente.

Desde el punto de vista de la modelación, el bloque de entrada se puede considerar compuesto por un muestreador ideal y un conversor impulso-muestra, y el de salida por un conversor inverso, seguido de un módulo de

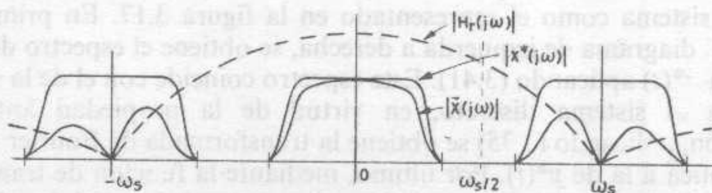


Figura 3.16 Espectro de amplitud de una señal muestreada y retenida.

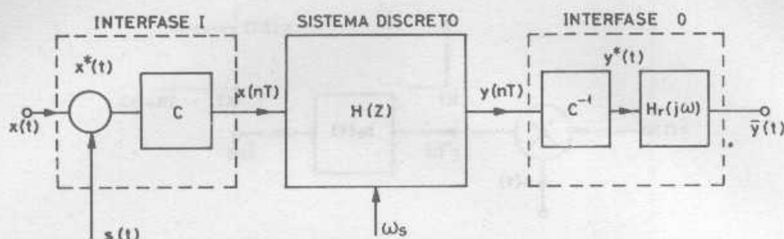



Figura 3.17 Sistema muestreado.

reconstrucción que puede consistir en un bloque de retención tal como el descrito en el apartado anterior.

La implementación de estos bloques depende del sistema físico que el sistema discreto esté modelando. Si se tratara de un computador digital, deberían incorporarse las conversiones A/D y D/A en los bloques de entrada y de salida respectivamente. Pero si se trata de un circuito SC obviamente no es así, ya que estos circuitos operan directamente sobre muestras analógicas. En este último caso los dos bloques suelen consistir en módulos S/H aunque, según el tipo de circuito, sus funciones pueden quedar absorbidas por él mismo.

Para obtener el espectro de la señal $\bar{y}(t)$, el único factor que queda por conocer es la relación existente entre las representaciones en el dominio de la frecuencia de la señal muestreada idealmente y la secuencia asociada: en definitiva, caracterizar los elementos designados por $C$ y $C^{-1}$ en la figura 3.17.

Aplicando la transformada de Fourier a la señal $x^*(t)$ definida por (3.36) se obtiene

$$X^*(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{-\infty}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT)\right]e^{-j\omega t}dt=\sum_{-\infty}^{\infty} x(kT)e^{-j\omega kT} \quad (3.45)$$

expresión que coincide con la representación espectral de la secuencia $x(nT)$, definida por (3.32). Este resultado permite salvar en el dominio de la frecuencia la barrera conceptual entre una señal muestreada, formada por una sucesión de impulsos, y la señal discreta que se define asignando a cada uno de ellos una muestra de valor igual a su peso.

Finalmente se está en disposición de obtener el espectro de la señal de salida $y(t)$ en un sistema como el representado en la figura 3.17. En primer lugar, siguiendo el diagrama de izquierda a derecha, se obtiene el espectro de la señal muestreada $x^*(t)$ aplicando (3.41). Este espectro coincide con el de la secuencia de entrada al sistema discreto, en virtud de la propiedad anterior. A continuación, aplicando (3.35) se obtiene la transformada de Fourier de $y(nT)$, que es idéntica a la de $y^*(t)$. Por último, mediante la función de transferencia (3.43) del módulo de retención se obtiene el espectro de la señal de salida, cuya expresión vendrá dada por

$$\bar{Y}(j\omega)=\left[\frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{\infty} X(j\omega-n\omega_s)\right] H(e^{j\omega T})H_r(j\omega) \qquad (3.46)$$

El producto de los dos últimos factores, junto con la constante $1/T$, puede considerarse como la función de transferencia del sistema muestreado.

Si lo que se pretende es conseguir un comportamiento frecuencial lo más próximo posible al de un sistema continuo, con función de transferencia $H_c(s)$, en el que se cumple

$$Y(j\omega)=H_c(j\omega)X(j\omega) \qquad (3.47)$$

debe asegurarse, en primer lugar, que la señal de entrada $x(t)$ sea de banda limitada. De lo contrario, por efecto del muestreo, los espectros del sumatorio en (3.46) se solaparían, alterándose entonces la representación de la señal en el dominio de la frecuencia e imposibilitando una relación como (3.47). Con este fin, en la práctica se dispone a la entrada un filtro de paso bajo denominado de antisolapamiento.

Por otra parte, debido a la periodicidad de los dos primeros factores de (3.46), $\bar{Y}(j\omega)$ tendrá componentes a lo largo de todo el eje, aunque atenuados progresivamente por el efecto del módulo de retención. Para eliminar las componentes frecuenciales fuera de la banda de Nyquist, se dispone a la salida otro filtro de paso bajo que se llama de alisado. Esta denominación se debe a que, efectivamente, estas componentes de altas frecuencias que suprime, son las responsables de las discontinuidades propias de la señal muestreada y retenida que se obtiene sin este filtro.

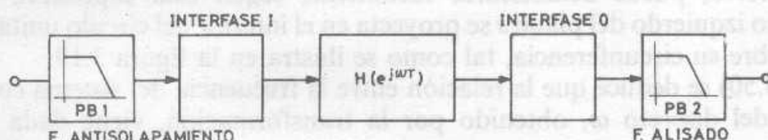



Figura 3.18 Sistema para procesado de señales continuas.

El conjunto total se representa esquemáticamente en la figura 3.18. El factor $1/T$ de (3.46) se considera absorbido por uno de los filtros, por lo que se le puede asignar una función global de transferencia

$$H_c(j\omega)=H_1(j\omega)H(e^{j\omega T})H_r(j\omega)H_2(j\omega) \qquad (3.48)$$

donde $H_1(j\omega)$ y $H_2(j\omega)$ son las funciones de transferencia de los filtros de antisolapamiento y de alisado respectivamente.

En la práctica, el margen de frecuencias utilizado suele ser una fracción de la banda de Nyquist. Por ello, el efecto del bloque de mantenimiento es poco importante. Aun así, puede compensarse totalmente diseñando de forma

adecuada, por ejemplo, el filtro de alisado. Procediendo en este sentido, y suponiendo que el filtro de antisolapamiento no modifica la respuesta en la banda de interés, (3.48) se reduce finalmente a la expresión

$$H_c(j\omega)=H(e^{j\omega T}) \tag{3.49}$$

que pone de manifiesto la posibilidad de procesar señales continuas, según el esquema de la figura 3.18, con una función de transferencia idéntica a la del sistema discreto que se utilice.

Este resultado, aparte de su evidente interés, apunta la posibilidad de utilizar las técnicas de diseño de sistemas continuos para el filtrado de señales, en la obtención de funciones de transferencia de sistemas discretos de comportamiento equivalente.

Para ello, se requieren transformaciones adecuadas entre el plano $s$ y el plano $z$, de manera que partiendo de una función $H(s)$, se llegue a una función $H(z)$, cuyo comportamiento frecuencial sea lo más parecido posible.

Otra característica no menos importante, que debe tener una transformación útil, es que a partir de un sistema continuo estable genere un sistema discreto también estable.

Una transformación que cumple estos dos requisitos y que es utilizada extensivamente en el diseño de filtros digitales y filtros SC es la transformación bilineal, definida por

$$s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \tag{3.50}$$

En efecto, puede demostrarse fácilmente, según esta expresión, que el semiplano izquierdo del plano $s$ se proyecta en el interior del círculo unitario y el eje $j\omega$ sobre su circunferencia, tal como se ilustra en la figura 3.19.

De (3.50) se deduce que la relación entre la frecuencia del sistema continuo $\omega_a$ y la del discreto $\omega$, obtenido por la transformación, viene dada por la expresión

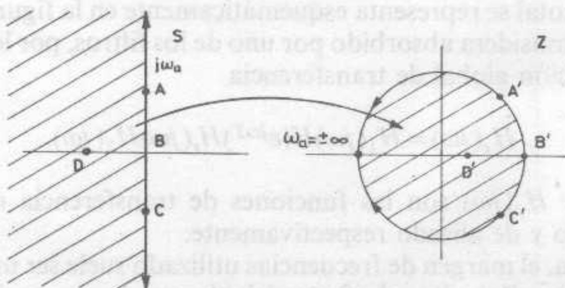



Figura 3.19 Transformación bilineal.

$$\omega = \frac{2}{T} \text{ arc tg } \frac{\omega_a}{2} \tag{3.51}$$

representada gráficamente en la figura 3.20

Como se observa, este tipo de dependencia es una consecuencia lógica de la proyección de todo el eje $j\omega$ sobre una circunferencia, de longitud finita. Este aspecto produce una distorsión en el comportamiento frecuencial del sistema discreto obtenido respecto al del continuo del que se parte. Por ello, debe tenerse presente en el diseño.

En el apartado siguiente se tratarán otras transformaciones que surgen en el estudio de algunos circuitos SC elementales.

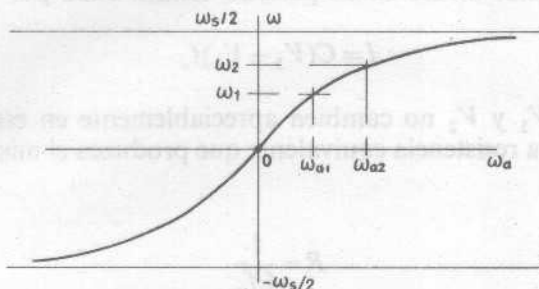



Figura 3.20 Relación entre las frecuencias.

## 3.3 FUNDAMENTOS DE LOS CIRCUITOS SC

Como se mencionó en la introducción a este capítulo, el principio básico, a partir del que se ha venido desarrollando el diseño de los circuitos SC, es la posibilidad que existe de simular el comportamiento de los resistores utilizando para ello pequeños condensadores conmutados periódicamente. La primera referencia histórica que se tiene de este mecanismo se debe a J.C. Maxwell y se encuentra en su obra «Treatise of Electricity and Magnetism» publicada en 1873. Ha sido cien años más tarde cuando el desarrollo de la tecnología MOS ha permitido su aplicación práctica a gran escala, aunque la teoría referente al funcionamiento de los sistemas muestreados ya tenía varias décadas de existencia.

En este punto se estudian detalladamente algunas de las configuraciones que permiten la simulación de resistores, así como su aplicación directa en la obtención de los integradores SC, circuitos éstos de gran interés, que con ligeras modificaciones, según se verá más adelante, constituyen los bloques básicos en la mayor parte de los circuitos SC actuales.

### 3.3.1 Simulación de resistores

En la figura 3.21 se ilustra una de las posibilidades para simular el comportamiento de un resistor mediante un condensador conmutado.

Suponiendo que inicialmente el conmutador está en la posición 1, el condensador se cargará a la tensión $V_1$. Al pasar a la posición 2 se recargará a la tensión $V_2$, con lo que la carga transferida por el condensador desde el nodo 1 al 2 será

$$\Delta q = C(V_1 - V_2) \tag{3.52}$$

Si ahora se acciona el conmutador de forma que pase alternativamente entre las posiciones 1 y 2 a la frecuencia $f_c$, aparecerá una corriente pulsada entre los dos nodos cuyo valor medio en un período vendrá dado por

$$I = C(V_1 - V_2)f_c \tag{3.53}$$

suponiendo que $V_1$ y $V_2$ no cambien apreciablemente en este intervalo. Por tanto, el valor de la resistencia equivalente que produzca el mismo valor para la corriente es

$$R = \frac{1}{Cf_c} \tag{3.54}$$

Para llegar a este resultado se ha supuesto que las tensiones $V_1$ y $V_2$ no se alternan por la conexión del condensador, es decir, que se trata de tensiones medidas, o bien en terminales de fuentes de tensión, si éstas son distintas de cero, o bien en una masa real o virtual, si alguna de ellas es nula. Por otra parte, para que el resultado tenga cierta consistencia, al menos en una primera aproximación, se requiere obviamente que la frecuencia de conmutación sea mucho mayor que las frecuencias de interés en el circuito. A medida que $f_c$ se aproxime a estas frecuencias, más diferirían entre sí los comportamientos de un circuito RC continuo en el tiempo y del circuito SC obtenido sustituyendo

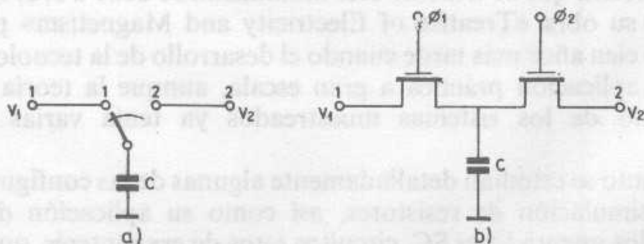



Figura 3.21 *a*) Simulación de un resistor mediante un condensador conmutado; *b*) Implementación con transistores MOS.

según (3.54) los resistores por condensadores conmutados. En cualquier caso, un análisis preciso siempre necesitará técnicas propias de los sistemas muestreados.

Los resistores realizados por condensadores conmutados requieren superficies reducidas de integración aun para valores elevados de resistencia. De hecho, según el mecanismo descrito y como queda reflejado en (3.54), cuanto mayor es el valor de la resistencia a emular, menor es la capacidad del condensador conmutado que se necesita. En los circuitos SC que se utilizan actualmente hay una diferencia de uno o dos órdenes de magnitud entre el área ocupada por condensadores conmutados y el área que ocuparían las resistencias equivalentes realizadas por las técnicas clásicas de integración. Por ejemplo, para conseguir un producto RC del orden de 0,1 ms, valor típico en el margen de audiofrecuencia, se requiere una resistencia de 10 MΩ para que el condensador asociado sea del orden de 10 pF, que es un valor razonablemente práctico. Esta resistencia se puede conseguir según (3.54) conmutando un condensador de 1 pF a la frecuencia de 100 kHz. El área que se requiere es, por lo menos, cien veces inferior a la que ocuparía una resistencia de 10 MΩ con película de polisilicio, que además es un valor bastante impracticable.

En la figura 3.22 se representa un circuito SC alternativo para la simulación de resistores.

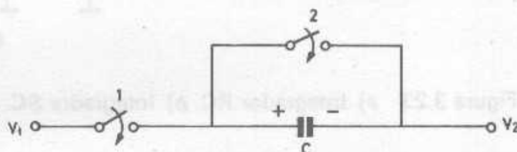



Figura 3.22 Circuito alternativo para la emulación de resistores.

Suponiendo que inicialmente el interruptor 1 se cierra y mientras el 2 permanece abierto, el condensador adquirirá una carga cuya expresión va a coincidir con (3.52).

Si ahora se invierte la posición de ambos interruptores, el condensador se descargará a través de 2. Repitiendo alternativamente de forma periódica estas dos operaciones a la frecuencia $f_c$, entre los nodos de tensiones $V_1$ y $V_2$ circulará una corriente cuyo valor medio coincidirá con el dado por (3.53), con lo que la expresión (3.54) para la resistencia equivalente es válida también para este circuito, presentando además las mismas limitaciones antes descritas. Sin embargo, como se verá en los apartados siguientes, los circuitos SC derivados por sustitución de los resistores por ambos tipos de condensador conmutado presentan ciertas diferencias en sus comportamientos que pueden ponerse de manifiesto sometiendo a los referidos circuitos a un análisis detallado en los términos propios de los sistemas muestreados.

### 3.3.2 Un integrador SC

En muchas técnicas de realización de filtros RC, como las basadas en el diseño de secciones bicuadráticas por simulación analógica de sus funciones de red, y la realización de filtros activos a partir del flujograma de señal de las redes LC en escalera, se utiliza como bloque básico el integrador de la figura 3.23*a*, donde se verifica

$$v_{0\,RC}(t) = -\frac{1}{R_1 C_2}\int_{-\infty}^{t} v_{IN}(\tau)d\tau \tag{3.55}$$

En este circuito puede sustituirse el resistor por cualquiera de los circuitos de simulación descritos con el propósito de conseguir un integrador SC. Utilizando para ello el condensador conmutado de la figura 3.21 se llega al circuito de la figura 3.23*b*, donde la capacidad de $C_1$ está relacionada con $R_1$ a través de (3.54).

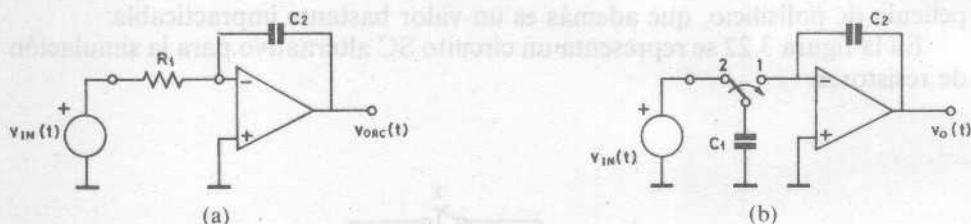



Figura 3.23 *a*) Integrador RC. *b*) Integrador SC.

Para comprobar su comportamiento, puede determinarse la tensión de salida $v_0(t)$ para una tensión de entrada $v_{IN}(t)$ en escalón de amplitud $V$. El conmutador se acciona con la señal de control $v_c(t)$ de la figura 3.24 a una frecuencia $f_c$ y permanece en las posiciones 1 o 2 durante los intervalos $\varphi_1$ o $\varphi_2$ respectivamente, que se suponen de igual duración $T/2$, siendo $T$ el período de conmutación.

Cada vez que el conmutador pasa a la posición 2 el condensador $C_1$ se carga a la tensión $V$ con una constante de tiempo que depende de la resistencia $R_{ON}$ del conmutador. Cuando el conmutador pasa a la posición 1, el condensador se descarga a través del cortocircuito virtual a la entrada del AO y toda su carga inicial es transferida al condensador $C_2$, repitiéndose periódicamente el proceso. El incremento de la tensión de salida $v_0(t)$ que se produce en cada período viene dado por

$$\Delta v_0(t) = -\frac{C_1}{C_2}V \tag{3.56}$$

ya que la carga transferida a $C_2$ es igual a $C_1 V$.

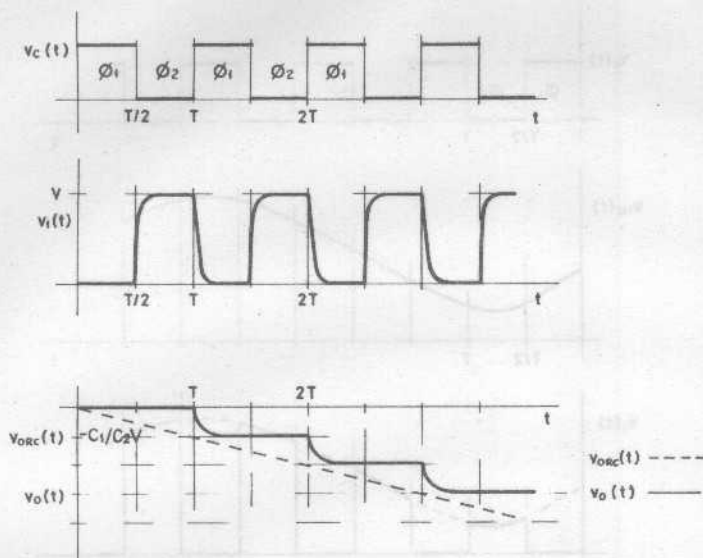



Figura 3.24 Señales en el integrador SC con entrada constante: $v_1(t)$: tensión en $C_1$ $v_0(t)$: tensión de salida.

En la figura 3.24 se representan la señal de control $v_c(t)$, la tensión $v_1(t)$ en el condensador $C_1$ y la tensión de salida $v_0(t)$.

Aplicando la misma tensión de entrada al integrador RC de la figura 3.23*a*, se obtendrá a la salida una tensión en rampa de pendiente negativa cuya expresión, teniendo en cuenta (3.54) y (3.55), será

$$v_{0\,RC}(t) = -\frac{C_1}{C_2}\frac{V}{T}t \tag{3.57}$$

Esta tensión está representada en la figura 3.24 por la línea de trazos y su comparación con la tensión en escalera $v_0(t)$ permite comprobar la estrecha relación entre los dos integradores y el carácter aproximado de su equivalencia.

Para generalizar el estudio anterior se supone ahora, a la entrada del integrador SC, una tensión cualquiera $v_{IN}(t)$ variable con el tiempo y se trata de obtener la tensión de salida $v_0(t)$. Según el comportamiento descrito, el condensador $C_1$ se cargará a la tensión $v_{IN}(t)$ durante las fases 2 y transferirá paquetes de carga al condensador $C_2$ en las fases 1. De esta manera, si se supone despreciable el efecto de la constante de tiempo de carga y descarga, la tensión $v_0(t)$ será constante a tramos de duración $T$, que coincidirá con los intervalos $[nT,(n+1)T]$, tal como puede verse en la figura 3.25.

Además, esta tensión $v_0(t)$ sólo depende de los valores que toma $v_{IN}(t)$ en los instantes $nT^-$, inmediatamente anteriores a las conmutaciones de la fase 2 a la

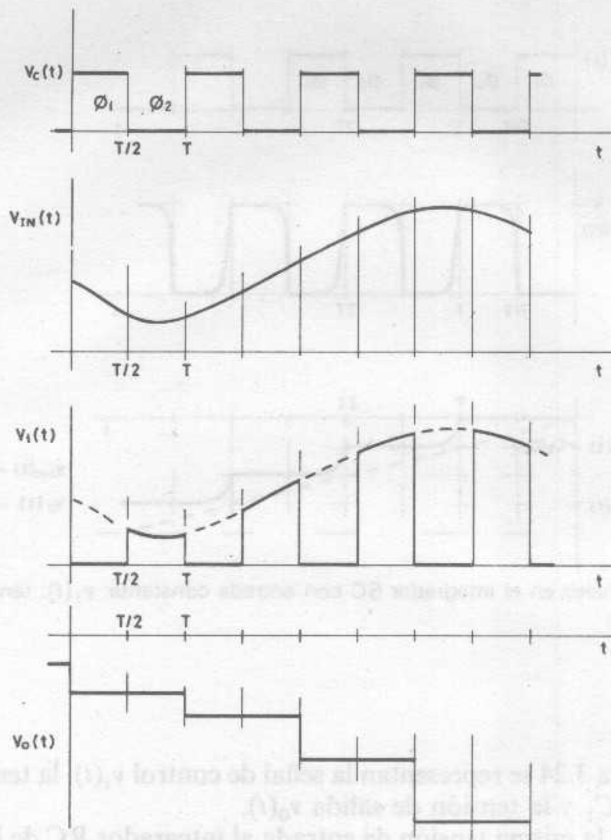



Figura 3.25 Señales en el integrador SC con entrada variable con el tiempo.

fase 1. Esta característica va a permitir establecer una relación exacta entre secuencias definidas sobre las señales de entrada y de salida respectivamente.

Aplicando el principio de conservación de carga en la transferencia que se produce desde el condensador $C_1$ al condensador $C_2$ puede escribirse

$$C_2[v_0(nT^-)-v_0((n-1)T^-)]=-C_1 v_{IN}((n-1)T^-) \tag{3.58}$$

Esta es una ecuación en diferencias que relaciona entre sí secuencias definidas por muestreo sobre $v_{IN}(t)$ y $v_0(t)$ en los instantes $nT^-$, que se denominarán secuencias de entrada y de salida respectivamente.

Tomando la transformada $Z$ en ambos miembros se obtiene

$$C_2(1-z^{-1})V_0(z)=-C_1 z^{-1} V_{IN}(z) \tag{3.59}$$

donde $V_{IN}(z)$ y $V_0(z)$ son las transformadas de las secuencias de entrada y de salida que se han definido. Despejando $V_0(z)$ se tendrá

$$V_0(z) = -\frac{C_1}{C_2}\frac{1}{z-1}V_{IN}(z) \tag{3.60}$$

Este resultado permite asignar al integrador SC de la figura 3.23*b* la función de transferencia

$$H(z) = -\frac{C_1}{C_2}\frac{1}{z-1} \tag{3.61}$$

En esta expresión se pone de manifiesto que el comportamiento de este integrador SC no depende de los valores absolutos de sus capacidades sino de las relaciones entre ellas. Esta importante propiedad es común a todos los circuitos SC.

Resulta ahora interesante contrastar el comportamiento de los dos integradores, RC y SC, en el dominio de la frecuencia.

Haciendo en (3.61)

$$z = e^{j\omega T} \tag{3.62}$$

y después de operar convenientemente se obtiene

$$H(e^{j\omega T}) = -\frac{C_1}{C_2}\frac{1}{j\omega T}\left[\frac{\omega T/2}{\text{sen}\,\omega T/2}\right]e^{-j\omega T/2} \tag{3.63}$$

Por otra parte, la función de transferencia en la variable *s* del integrador RC tiene la expresión

$$H_{RC}(s) = -\frac{1}{R_1 C_2 s} \tag{3.64}$$

Haciendo $s = j\omega$ y teniendo en cuenta la relación (3.54), supuesta entre $R_1$ y $C_1$, para conseguir la equivalencia entre los integradores, se tendrá

$$H_{RC}(j\omega) = -\frac{C_1}{C_2}\frac{1}{j\omega T} \tag{3.65}$$

que coincide precisamente con el primer factor de (3.63).

Por tanto, sustituyendo (3.65) en (3.63) puede escribirse

$$H(e^{j\omega T}) = H_{RC}(j\omega)\left[\frac{\omega T/2}{\text{sen}\,\omega T/2}\right]e^{-j\omega T/2} \tag{3.66}$$

En esta expresión pueden verse con claridad las diferencias entre ambos integradores en el dominio de la frecuencia. El término fraccionario es el inverso de la función sinc($\omega T/2$) que es aproximadamente igual a la unidad siempre que $\omega T/2 \ll 1$. Es decir, que la frecuencia de las señales de entrada sea muy inferior a

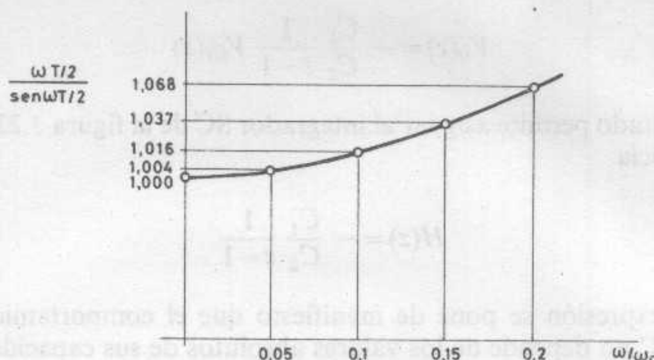



Figura 3.26 Término corrector de la amplificación.

la frecuencia de conmutación. En la figura 3.26 se puede ver la variación con la frecuencia de este término corrector, que modifica sólo la amplificación.

Puede comprobarse que su influencia es poco notable incluso para márgenes de frecuencia bastante amplios. Por ejemplo, para $\omega = 0{,}1\omega_c$ la alteración introducida es tan sólo del 1,6 %. Si se pretendiera realizar un circuito SC mediante la sustitución de los integradores en un circuito RC, este efecto equivaldría a una variación en los parámetros y, si la sensibilidad del circuito RC de partida no es elevada, apenas introduciría diferencias en su comportamiento.

En cuanto al término exponencial $e^{-j\omega T/2}$, que no tiene efecto sobre la amplificación, aunque sí sobre el desfase, representa un retardo de $T/2$ y desde el punto de vista práctico es el que impone mayores restricciones en la posibilidad de sustituir en un circuito los integradores RC por el integrador SC que se está estudiando.

Suponiendo $\omega T/2 \ll 1$ y haciendo la aproximación

$$e^{j\omega T/2} \approx 1 + j\omega T/2 \tag{3.67}$$

para la expresión (3.63) se obtiene

$$H(e^{j\omega T}) \approx \frac{C_1}{T\left(j\omega C_2 - \dfrac{\omega^2 T}{2} C_2\right)} \tag{3.68}$$

Este resultado permite interpretar el comportamiento del integrador SC, desde el punto de vista de la respuesta frecuencial, como el que se produciría en un integrador RC en el que el condensador tuviera un factor de calidad

$$Q = -2/\omega T \tag{3.69}$$

cuyo signo implica una conductancia de pérdidas negativa en paralelo con el condensador.

Según (3.69) para que $|Q| \geqslant 100$ se requiere que $\omega < \omega_c/100\pi$, condición muy restrictiva al exigir frecuencias de conmutación muy elevadas para señales de entrada en los márgenes frecuenciales de interés. Este aspecto determina que debe descartarse como método útil de diseño el consistente en la simple sustitución de los integradores RC por el integrador SC estudiado. Sin embargo, ello no significa en absoluto su invalidación para ser utilizado como primera fase en el diseño, sino que los métodos prácticos de síntesis deben ser más elaborados en el sentido de tomar en consideración las características específicas de los circuitos SC. De hecho, el integrador SC referido, con pequeñas modificaciones que se verán en detalle, constituye uno de los bloques básicos en los circuitos SC actuales.

Al haberse caracterizado el integrador SC como sistema discreto mediante la función de transferencia (3.61), interesa ver la relación que hay entre las variables $s$ y $z$ al sustituir el integrador RC por el integrador SC equivalente.

Comparando (3.61) con (3.64) y teniendo en cuenta (3.54), se comprueba directamente que la función de transferencia del integrador SC se obtiene aplicando la transformación

$$s \rightarrow \frac{z-1}{T} \tag{3.70}$$

a la función de transferencia del integrador RC. Esta expresión corresponde a la transformación por diferencias en adelanto («forward-difference»), inicialmente utilizada en diseño de filtros digitales, que equivale a sustituir la derivación en el dominio temporal por la diferencia, ponderada con el período de muestreo, entre la muestra inmediatamente adelantada y la actual en el sistema discreto. Esta interpretación de (3.70) es obvia si se tiene en cuenta que la derivación respecto al tiempo equivale a la multiplicación por $s$ en el dominio transformado y que adelantar en una unidad una secuencia produce la multiplicación de su transformada por $z$.

Como se ve, este enfoque permite analizar desde otro punto de vista la relación entre los dos integradores y justificar ahora el carácter aproximado de su equivalencia por las limitaciones que tiene la sustitución de la derivada en el dominio temporal implicada por (3.70).

### 3.3.3 Integrador SC alternativo

Puede obtenerse un segundo integrador SC sustituyendo el resistor del integrador RC por un condensador conmutado según se indicaba en la figura 3.22. El circuito que se obtiene se representa en la figura 3.27.

Según el control de los interruptores que se indica en la figura, el condensador $C_1$ se descarga durante la fase 1 y se carga a la tensión $V_{IN}(t)$ en la fase 2, pero en este caso la corriente de carga circula también por $C_2$. Es decir, a diferencia del integrador SC de la figura 3.23*b*, en este circuito la transferencia de carga a $C_2$ se realiza simultáneamente a la carga de $C_1$.

En la figura 3.28 se puede ver la tensión de salida del nuevo integrador $v_0(t)$

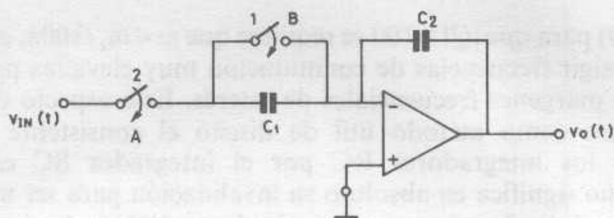



Figura 3.27 Circuito alternativo de integrador SC.

cuando la tensión de entrada es el escalón de amplitud $V$. Cada vez que se cierra el interruptor A la tensión de salida experimenta un incremento negativo que vendrá dado por (3.56), ya que, también ahora, la carga transferida a $C_2$ en cada período es $C_1V$. La línea a trazos representa, igual que en la figura 3.24, la tensión que se obtendría a la salida del integrador RC equivalente.

Comparando las tensiones en escalera de ambas figuras, se observa que hay un adelanto de $T/2$ en la salida del último integrador descrito, respecto a la señal de salida del primero. Esta diferencia en el comportamiento es debida a la simultaneidad con que se producen la carga de $C_1$ y la transferencia de carga a $C_2$ en este segundo integrador.

Si se supone ahora una tensión de entrada variable con el tiempo, la tensión de salida no será constante a tramos de duración $T$, como ocurría con el integrador de la figura 3.23*b*. En efecto, mientras que en la fase 1 el valor de $v_0(t)$ sí es constante, durante la fase 2 hay una conexión directa entre la entrada y la salida, por lo que en $v_0(t)$ habrá una componente que seguirá las variaciones de $v_{IN}(t)$ y tendrá su misma forma. De hecho, al margen de la tensión que $C_2$ haya adquirido en los intervalos anteriores, el circuito se comporta durante la fase 2 adicionalmente como un amplificador de amplificación $-C_1/C_2$.

Para conseguir una caracterización en términos de una función de transferencia equivalente a (3.61), puede plantearse una ecuación similar a (3.58). En este caso se tendría

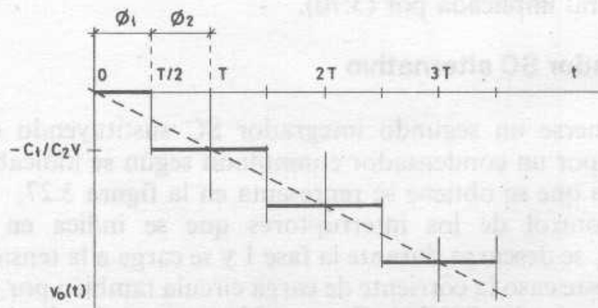



Figura 3.28 Tensión de salida del integrador de la figura 3.27 con tensión de entrada en escalón.

$$C_2\{v_0(nT^-)-v_0[(n-1)T^-]\}=-C_1 v_{IN}(nT^-) \quad (3.71)$$

donde se observa que ahora el incremento de la tensión de salida en $nT^-$ depende del valor de la tensión de entrada en el mismo instante.

Aplicando la transformada $Z$ a la ecuación en diferencias (3.71) y despejando la transformada de la secuencia de salida, se obtiene

$$V_0(z)=-\frac{C_1}{C_2}\frac{z}{z-1}V_{IN}(z) \quad (3.72)$$

con lo que puede asignarse al integrador de la figura 3.27 la función de transferencia

$$H(z)=-\frac{C_1}{C_2}\frac{z}{z-1} \quad (3.73)$$

Para contrastar el comportamiento de este integrador en el dominio de la frecuencia con el del integrador RC, se procede de forma similar a como se hizo para el primer integrador, obteniéndose

$$H(e^{j\omega T})=-\frac{C_1}{C_2}\frac{1}{j\omega T}\left[\frac{\omega T/2}{\operatorname{sen}\omega T/2}\right]e^{j\omega T/2} \quad (3.74)$$

Comparando esta expresión con (3.63) se observa que la amplificación es la misma y que la única diferencia radica en el término exponencial, que implica ahora un adelanto de $T$ segundos respecto al comportamiento del primer integrador y que se ponía de manifiesto al comparar la expresión (3.72) con (3.61).

Suponiendo también ahora el término entre corchetes aproximadamente constante y englobando el término exponencial en el primer factor, se obtiene la expresión aproximada

$$H(e^{j\omega T})\approx-\frac{C_1}{T\left(j\omega C_2+\frac{\omega^2 T}{2}C_2\right)} \quad (3.75)$$

que admite una interpretación similar a (3.68), pero ahora el factor de calidad atribuible al condensador del integrador RC sería positivo aunque con el mismo valor absoluto, es decir, $Q=2/\omega T$, presentando el circuito idénticas limitaciones que el anterior.

De todas formas, esta complementariedad respecto al signo del factor $Q$ que se presenta en los dos integradores descritos, actúa positivamente en ciertos métodos de síntesis. En ellos, la utilización adecuada de los dos tipos de integrador, permite la cancelación casi total de los efectos debidos al error de fase que se produce al sustituir los integradores de una realización RC por integradores SC.

Por otra parte, comparando (3.73) con la función de transferencia del integrador RC y teniendo en cuenta la expresión (3.54) para establecer la equivalencia entre los integradores, se comprueba que ahora la función de transferencia del nuevo integrador puede obtenerse a partir de (3.64) mediante el cambio $s \rightarrow (1-z^{-1})/T$, que corresponde a la transformación «backward-difference» y equivale a sustituir la derivación en el dominio temporal por la diferencia, ponderada con $T$, entre la muestra actual y la muestra retrasada inmediata.

### 3.3.4 Estudio de las transformaciones

Un estudio detallado de las transformaciones «backward-difference» y «forward-difference» permite justificar, desde un punto de vista más general, la conclusión a la que se llegó anteriormente sobre la escasa utilidad de la simple sustitución de los integradores RC por uno u otro tipo de integrador SC, ya que ninguna de estas transformaciones se adecua, sin fuertes limitaciones, a la discretización de una función de transferencia en la variable $s$.

Para que la función de transferencia discreta, que se obtiene mediante una transformación, conserve adecuadamente las características de la respuesta frecuencial, se requiere que el eje imaginario $j\omega$ del plano $s$ se proyecte sobre la circunferencia de radio unidad en el plano $z$. Por otra parte, para garantizar la estabilidad del sistema discreto obtenido, es necesario que el semiplano izquierdo del dominio $s$ se proyecte en el interior del círculo de radio unidad en el plano $z$.

El primero de los requisitos no lo cumple ninguna de las dos transformaciones. En la figura 3.29 pueden verse las imágenes del eje $j\omega$ producidas. La transformación «forward-difference» lo proyecta sobre la recta $\mathrm{Re}(z)=1$ y la

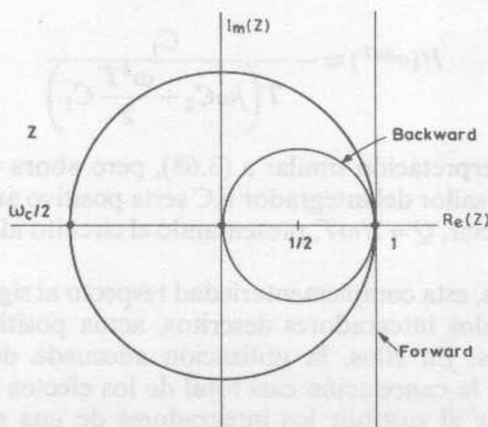



Figura 3.29 Imágenes del eje $j$ producidas por las transformaciones $s \rightarrow z$.

transformación «backward-difference» produce como imagen una circunferencia de radio 1/2 centrada en $z=1/2$.

Sólo se conservarán, por ello, las características de la respuesta frecuencial en un pequeño entorno de $z=1$ sobre la circunferencia de radio unitario, para lo que se requiere que las frecuencias de trabajo estén muy lejos del límite de Nyquist $\omega_c/2$.

Respecto al segundo requisito, la transformación «backward-difference» lo cumple, ya que el semiplano izquierdo del plano se proyecta en el interior del círculo de radio unidad, pero no así la transformación «forward-difference» que lo hace sobre el semiplano definido por $\text{Re}(z)<1$. Ello tiene como consecuencia que bajo esta transformación puede llegarse a un sistema inestable, hecho que concuerda con el factor de calidad negativo que se asignaba al condensador del integrador RC para justificar el comportamiento frecuencial propio del integrador SC equivalente.

Puede concluirse, por tanto, que una técnica de realización de filtros SC, consistente sólo en la simple sustitución directa de los integradores en un filtro RC, no dará resultados muy satisfactorios. Sin embargo, esta línea puede utilizarse provechosamente para generar las estructuras que, una vez analizadas de forma exacta en la variable $z$, permitan elaborar métodos útiles de diseño, basados, por ejemplo, en la aplicación de la transformación bilineal, descrita en 3.26, a las funciones de transferencia en la variable $s$.

En la bibliografía pueden encontrarse integradores SC de desarrollo posterior que realizan la transformación bilineal del integrador RC equivalente. Aunque desde el punto de vista teórico el problema parecía resuelto, pronto estos circuitos fueron descartados por razones tecnológicas, ya que las estructuras que utilizaban tenían un comportamiento dependiente de las capacidades parásitas de los dispositivos MOS, aspecto este que se desarrollará más adelante. Los métodos de síntesis actuales, basados en la transformacion bilineal, la introducen de forma global, por ejemplo como se esbozaba en el párrafo anterior, y no por traducción individualizada de los elementos.

## 3.4 ASPECTOS PRACTICOS EN LA REALIZACION DE CIRCUITOS SC

Según se acaba de ver, las expectativas que se abrían de cara al diseño de circuitos SC, basados en la equivalencia entre resistores y condensadores conmutados, quedan apreciablemente limitadas por las propiedades de las transformaciones $s \rightarrow z$ que implican la sustitución directa de los resistores.

Existen además otras limitaciones que derivan de los aspectos prácticos de la realización física de los circuitos y que van a imponer fuertes restricciones en las topologías a utilizar como punto de partida. Estas limitaciones se desprenden directamente de las propiedades reales de los elementos de circuito realizados en tecnología MOS y pueden dividirse en dos categorías. En la primera se agrupan principalmente las que se desprenden de factores tales como las capacidades parásitas que forman las placas de los condensadores con el substrato del

circuito integrado, las corrientes de deriva y la estabilización de los AO. Las limitaciones impuestas por estos factores se consideran fundamentales y se traducen en un conjunto de reglas básicas de diseño que se describen seguidamente y que se aplican en la mayor parte de las realizaciones actuales.

En la segunda categoría se incluyen las limitaciones debidas a la influencia de las capacidades parásitas de los transistores que realizan los conmutadores. Este es un factor importante sobre todo de cara a minimizar el área de integración, aspecto este muy importante en la realización de circuitos con gran número de elementos.

### 3.4.1 Reglas básicas de diseño

Las reglas básicas de diseño que se describen derivan de aspectos considerados normalmente como fundamentales y se aplican, en general, en el diseño cuando se quieren conseguir realizaciones de calidad y precisión elevadas.

Estas reglas son las siguientes:

1. El mínimo circuito que debe llevar cada amplificador operacional en el bucle de realimentación es un condensador no conmutado. Ya que, en caso contrario, no existirían los lazos continuos de realimentación, necesarios para estabilizar los amplificadores operacionales. Pueden utilizarse, sin embargo, condensadores conmutados en paralelo con el condensador fijo de realimentación, por ejemplo para simular el resistor que lleva el integrador RC con pérdidas en paralelo con el condensador.
2. No son admisibles los nodos en los que confluyan únicamente condensadores no conmutados. Pues, en general, las placas de los condensadores están sometidas a cierta acumulación de carga producida por varios agentes parásitos, tales como las corrientes de deriva, transitorios al conectar la alimentación, etc., que podrían saturar los AO.

   Por tanto, para garantizar la estabilización del circuito en la zona de trabajo, se requiere que cada nodo esté conectado, bien directamente o, como mínimo, a través de un condensador conmutado, a puntos de baja impedancia respecto a masa. Se consideran en esta categoría: los terminales de los generadores de tensión puestos a masa, entre los que se incluyen las salidas de los AO, y las masas reales o virtuales. El circuito de la figura 3.30 sería aceptable porque la tensión del nodo 1 está estabilizada por el condensador C3.
3. Al menos uno de los terminales de cada condensador debe someterse a las siguientes normas en su conexión:
   *a*) En cada fase, este terminal debe estar conectado, bien a un generador de tensión o bien a masa.
   *b*) Si el terminal en cuestión se conecta a una masa virtual durante una de las fases, debe ir conectado necesariamente en la otra fase a un nodo de tensión cero.

   Esta restricción sobre el conexionado de los condensadores es debida a que, en los condensadores realizados en tecnología MOS, las placas

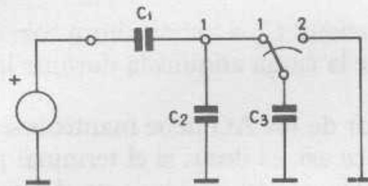


Figura 3.30 Estabilización de un nodo mediante un condensador conmutado.

forman capacidades parásitas con el substrato del circuito integrado, siendo particularmente importante la asociada a la placa inferior. Esta capacidad forma valores poco controlables que, sin embargo, pueden llegar a ser muy significativos. Concretamente, en los condensadores de doble capa de polisilicio, es del orden del 10 % de la capacidad nominal del condensador a realizar. Es evidente, por tanto, la importancia que tiene conseguir estructuras cuyo comportamiento no dependa de estas capacidades.

Puede comprobarse fácilmente que si se cumple esta regla de diseño respecto al terminal conectado a la placa inferior de cada condensador, este objetivo se logra. En la figura 3.31*a* $C_p$ es la capacidad parásita entre la placa inferior de $C_1$ y el substrato. Como A se conecta alternativamente entre la salida de $AO_1$ y masa, $C_p$ se cargará y descargará sin afectar al resto del circuito. Desde el punto de vista del análisis, es un elemento superfluo. Por el contrario, el terminal A en la figura 3.31*b* no cumple la

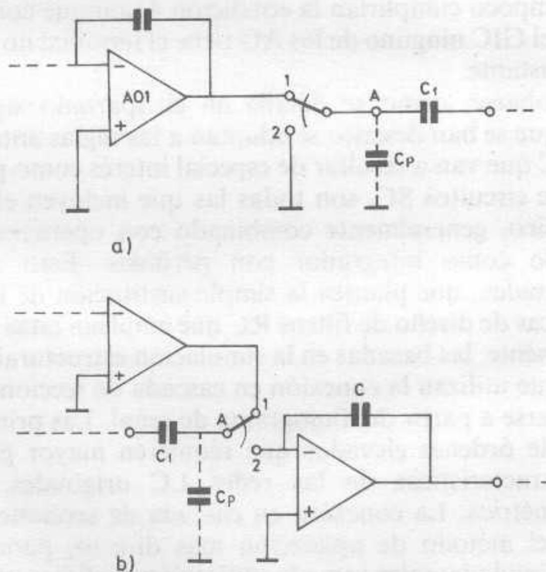


Figura 3.31 Influencia de la capacidad parásita de la placa inferior de los condensadores.

condición y la capacidad $C_p$ sí incide ahora sobre el comportamiento del circuito, puesto que la carga adquirida durante la fase 1 se transfiere a $C$ durante la fase 2.

4. El terminal no inversor de los AO debe mantenerse a una tensión de valor constante. Si no se hace así, es decir, si el terminal positivo se conecta a un nodo de tensión variable, el comportamiento del circuito va a depender de las capacidades parásitas que aparezcan entre el terminal inversor y el substrato.

   En este aspecto se profundiza en el punto siguiente. Además, en el caso de no cumplirse esta condición, se necesitarían AO con mejor rechazo del modo común en las realizaciones.

Es evidente que estas restricciones, traducidas en reglas de diseño, limitan notablemente las topologías de circuitos RC utilizables como punto de partida para generar circuitos SC equivalentes por simulación de los resistores. Por ejemplo, deben descartarse los filtros activos RC obtenidos a partir de filtros LC en escalera por simulación de los inductores. En estos filtros se utiliza como estructura básica el GIC, descrito en el capítulo 2. En este circuito, cuando se utiliza para simular inductores, ninguno de los AO lleva condensadores en los bucles de realimentación, tal como se ve en la figura 2.35. Por otra parte, si en el filtro LC inicial hay inductores flotantes, es preferible realizar un escalado de todos los elementos según $1/s$, con lo que cada condensador se transforma en un FDNR. En la realización de este nuevo elemento solamente uno de los AO lleva un condensador en el bucle de realimentación. Puede concluirse que, en ninguno de los dos casos, el circuito SC equivalente cumpliría la restricción 1.

Por otra parte, las topologías de los circuitos SC derivados por este procedimiento tampoco cumplirían la condición 4, aunque considerada menos crítica, ya que en el GIC ninguno de los AO tiene el terminal no inversor situado a una tensión constante.

Puede comprobarse, como se detalla en el apartado siguiente, que los integradores SC que se han descrito se adaptan a las reglas anteriores. Por ello, las estructuras RC que van a resultar de especial interés como punto de partida para la síntesis de circuitos SC, son todas las que incluyen el integrador RC como bloque básico, generalmente combinado con operaciones de suma, o también actuando como integrador con pérdidas. Esto a pesar de los problemas, ya tratados, que plantea la simple sustitución de integradores RC por SC. Las técnicas de diseño de filtros RC que emplean estas configuraciones son fundamentalmente: las basadas en la simulación estructural de las redes LC en escalera y las que utilizan la conexión en cascada de secciones bicuadráticas que pueden generarse a partir del flujograma de señal. Las primeras se utilizan en realizaciones de órdenes elevados que requieren mayor precisón, ya que conservan las características de las redes LC originales, respecto a la sensibilidad paramétrica. La conexión en cascada de secciones bicuadráticas, sin embargo, es el método de aplicación más directo, permite una mayor versatilidad y posibilidades tales como la utilización de diferentes frecuencias de conmutación para cada una de las secciones, con lo que puede conseguirse que

sean menos rigurosas las especificaciones del filtro de antisolapamiento. Por otra parte, se adaptan mejor a las aplicaciones en las que se requiera la preprogramación de las características frecuenciales partiendo de una estructura de soporte común. En la bibliografía se han descrito varios filtros monolíticos preprogramables por máscara que utilizan este principio y permiten disponer de hasta un total de 20 polos y ceros, e incluyen en el mismo circuito los filtros de antisolapamiento y alisado.

### 3.4.2 Capacidades parásitas asociadas a los conmutadores

En la implementación en tecnología MOS de los circuitos SC aparecen unas capacidades parásitas, adicionales a las estudiadas, debidas a los transistores que se utilizan para realizar los conmutadores. Estas capacidades son las formadas entre las difusiones de drenador y fuente (o surtidor) con el substrato. Sus valores no dependen de la capacidad de los condensadores del circuito, por lo que su influencia será tanto más notable cuanto más pequeñas sean las capacidades utilizadas. Es por ello conveniente buscar líneas de diseño que conduzcan a estructuras cuyo comportamiento no dependa tampoco de estas capacidades parásitas, evitando así tener que aumentar los valores de los condensadores y, como consecuencia, el área de integración necesaria, factor este primordial en la implementación de circuitos con gran número de elementos.

Los dos integradores descritos en 3.3.2 y 3.3.3 que se han vuelto a representar en la figura 3.32, se ajustan a las líneas básicas de diseño desarrolladas en 3.4.1. En particular, para que se cumpla la regla 3, basta que el terminal de $C_1$, señalado con el asterisco, coincida con la placa inferior. Por tanto, sus comportamientos no están influidos por la capacidad parásita de esta placa respecto al substrato. Sin embargo, no ocurre así respecto a las nuevas capacidades parásitas que se estudian ahora debidas a los conmutadores. En efecto, en el integrador *a*) de la figura 3.32, la capacidad parásita $C_{pA}$, que aparece entre el nodo A y tierra, suma su valor al de $C_1$, modificando así la función de transferencia. El valor de $C_{pA}$ puede llegar a ser del orden de 0,05 pF, por consiguiente, si quiere garantizarse una precisión del 1 % para $C_1$, deben utilizarse valores superiores a 5 pF, lo que conduce a superficies considerables

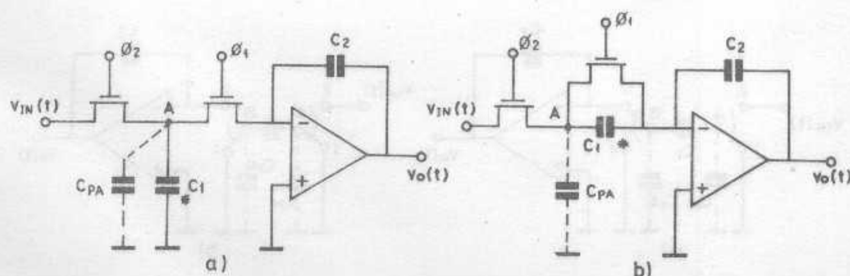


Figura 3.32 Capacidades parásitas en los integradores.

en la integración, sobre todo si se tiene en cuenta que el condensador $C_2$ suele tener una capacidad bastante mayor que $C_1$, por lo menos en un orden de magnitud.

En el integrador *b*) la capacidad $C_p$ no se suma a la de $C_1$, sino que actúa de forma distinta. Como se ve en el circuito, durante la fase 2 se carga a la tensión de entrada y en la fase 1 transfiere carga a $C_2$, siguiendo un mecanismo similar al de $C_1$ en el integrador *a*). La función de transferencia, por tanto, quedará alterada incluso estructuralmente.

Las capacidades parásitas del resto de los nodos no afectan sustancialmente al comportamiento, si se supone que el nodo de entrada está conectado a un generador de tensión o salida de otro AO del circuito y el AO del integrador se comporta prácticamente como ideal.

### 3.4.3 Integradores insensibles a las capacidades parásitas

Con ligeras modificaciones pueden conseguirse integradores SC insensibles a las capacidades parásitas de los nodos. En la figura 3.33 se representan dos nuevos integradores que van a sustituir en las realizaciones a los correspondientes de la figura 3.32 y que, como puede comprobarse fácilmente, su comportamiento no se ve afectado por estas capacidades.

En efecto, en ambos circuitos el condensador $C_{pA}$ alternativamente se carga a la tensión de entrada $v_{IN}(t)$ y se descarga sin alterar la tensión del condensador $C_2$. El condensador $C_{pB}$ permanece constantemente a tensión cero con la suposición que se ha hecho de AO prácticamente ideal.

En cuanto al funcionamiento de estos dos circuitos, el integrador *a*) actúa en forma similar al correspondiente de la figura 3.32. Es decir, $C_1$ se carga a la tensión $v_{IN}(t)$ durante la fase 2 y transfiere a $C_2$ una carga $C_1 v_{IN}(nT^-)$ en la fase 1, pero ahora invirtiendo los terminales en la conmutación. Por consiguiente su función de transferencia será igual a (3.61) cambiada de signo, teniéndose

$$H_a(z) = \frac{C_1}{C_2}\frac{1}{z-1} \tag{3.76}$$

El signo positivo puede interpretarse como si este integrador fuera el

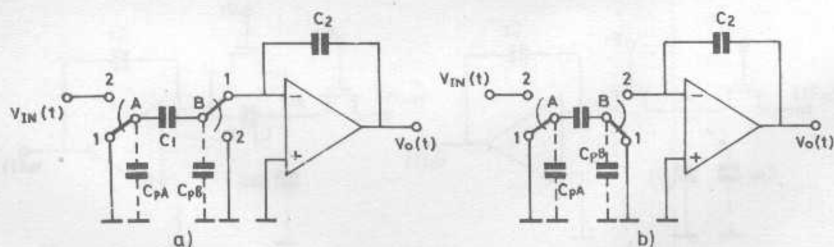



Figura 3.33 Integradores insensibles a las capacidades parásitas.

equivalente de un integrador RC con resistencia negativa. Esta interpretación resulta útil, por ejemplo, en la generación de secciones bicuadráticas a través del flujograma de señal, al no restringir el signo de las amplificaciones asignadas a las ramas.

El integrador *b*) se comporta de forma idéntica al correspondiente de la figura 3.32, por lo que su función de transferencia será

$$H_b(z) = -\frac{C_1}{C_2}\frac{z}{z-1} \qquad (3.77)$$

igual que (3.73)

La utilización de estos dos últimos integradores en la implementación de circuitos SC permite utilizar valores de capacidades tan pequeños como posibilite el proceso tecnológico, garantizando la tolerancia requerida. Actualmente se utilizan capacidades que pueden ser del orden de 0,1 pF. Ello supone una reducción de 50 veces en el área de integración debida a los condensadores, respecto a la que habría que utilizar en circuitos basados en los integradores que no tengan esta importante propiedad.

### 3.4.4 Reglas de conexión para circuitos insensibles a las capacidades parásitas

Tal como se ha visto, resulta de gran importancia disponer de circuitos SC cuyo comportamiento no se vea afectado por ninguna de las capacidades parásitas, incluyendo las introducidas por los conmutadores, pues ello permite minimizar el área de integración.

Se trata ahora de ver las restricciones adicionales que hay que imponer sobre la conexión de los condensadores para conseguir este objetivo.

Cada terminal de un condensador que se conmute entre distintos puntos, queda conectado necesariamente a difusiones de drenador o fuente y, por tanto, aparece una capacidad parásita entre este terminal y el substrato. Para evitar su efecto habrá que aplicar la restricción 3 del punto 3.4.1, ya que esta capacidad ejerce una influencia equivalente a la que producía la capacidad parásita debida a la placa inferior de los condensadores.

En conclusión, si quiere insensibilizarse el comportamiento del circuito también de las capacidades debidas a los conmutadores, esta regla básica debe aplicarse a los dos terminales de cada condensador.

Una consecuencia inmediata de su aplicación es que no puede haber nodos capacitivos en ninguna de las fases. En efecto, en la figura 3.34 se representa un nodo capacitivo A, que sería admisible según 3.4.1. El asterisco indica los terminales correspondientes a la placa de cada condensador más próxima al substrato. En la misma figura pueden verse las capacidades parásitas $C_p$, entre el nodo en cuestión y el de referencia, debidas precisamente al conmutador y que condicionarían claramente el comportamiento del circuito si el nodo A no se conectara a un punto de baja impedancia.

Puede observarse que estas nuevas restricciones, además de modificar las reglas 2 y 3 de 3.4.1, dándoles un carácter más restrictivo, refuerzan también la

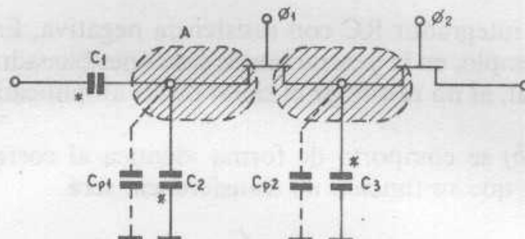


Figura 3.34 Capacidad parásita entre un nodo capacitivo y el substrato.

necesidad de aplicar la regla 4 pues el nodo de tensión no nula al que se conectara el terminal no inversor de un AO sería tratado como un nodo capacitivo y, por ello, sometido a la influencia de las capacidades parásitas que se están considerando.

En la figura 3.35 se ha representado la conexión más general posible para un condensador C en un circuito insensible a las capacidades parásitas, basándose en las consideraciones anteriores. Los nodos A y B sólo pueden estar conectados a salidas de AO, al generador de tensión de entrada o a masa. El nodo M debe estar conectado a un punto de tensión cero. No tiene sentido suponer que A o B fuera una masa virtual, porque en ese caso, como el otro nodo, B o A, tendría que estar conectado a un punto de tensión cero según las reglas de conexión, el condensador sería superfluo, es decir, no produciría efecto alguno sobre el circuito.

Como se desprende de la conexión general de la figura 3.35, el hecho de que todos los nodos de un circuito queden conectados a puntos de baja impedancia en ambas fases, es condición necesaria pero no suficiente para que el comportamiento de este circuito no dependa de las capacidades parásitas. En efecto, bastaría que el nodo M se conectara a un punto de tensión distinta de cero para que se perdiera esta propiedad.

Aunque las restricciones estudiadas, que deben imponerse en la conexión de condensadores por la presencia de las capacidades parásitas, son realmente severas, han permitido, sin embargo, el desarrollo de suficientes técnicas de diseño que permiten la realización de cualquier función de transferencia dentro

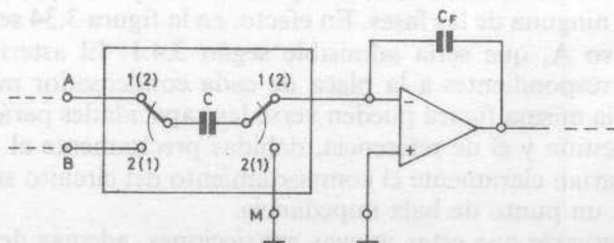


Figura 3.35 Conexión general de un condensador en un circuito.

de los márgenes frecuenciales adecuados. Puede asegurarse que en la actualidad todos los diseños de circuitos SC orientados a la implementación de filtros monolíticos se ajustan a estas reglas de diseño, ya que sólo así puede conseguirse, tal como se ha justificado, una importante reducción del área ocupada por el circuito sin deteriorar con ello las características previstas. No obstante, en ciertos casos, se admite la conexión de algún condensador según una configuración no inmune a las capacidades parásitas. Esto puede hacerse en diseños en los que la variación en el valor absoluto del condensador en cuestión, motivadas por tales capacidades, provoque alteraciones que, por ejemplo, afectaran de forma constante a la amplificación en todo el margen de frecuencias, por lo que su efecto podría considerarse irrelevante desde el punto de vista de la selectividad.

## 3.5 DISEÑO DE SECCIONES BICUADRATICAS SC

En este punto se va a describir una línea general para el diseño de secciones bicuadráticas SC, partiendo de circuitos RC, a través del desarrollo de un ejemplo concreto. Con ello se pretende ilustrar gran parte de los conceptos desarrollados en los puntos anteriores y, en particular, los referentes a los aspectos prácticos de la realización de circuitos SC que han sido tratados en el apartado 3.4. Por otra parte, también van a surgir otros aspectos de interés que de alguna forma pueden servir de motivación para los temas que se estudiarán en los apartados siguientes.

El procedimiento que se va a seguir, se ha esquematizado en el diagrama de la figura 3.36. En primer lugar, tal como se indica en el bloque 1, debe seleccionarse el circuito RC del que se va a partir, basándose en criterios de adecuación a las restricciones topológicas que ha de cumplir el circuito SC resultante. Según esta idea, puede seleccionarse una sección bicuadrática realizada en torno al integrador básico RC como ya se apuntaba en 3.4.1. De esta manera se asegura la conexión al nodo de referencia de los AO, y la posibilidad de utilizar los condensadores conmutados, según las conexiones generales de la figura 3.35, para sustituir los resistores, con lo que se consigue la topología de un circuito SC. La aplicación de la formula de transformación que aparece en el bloque 2 conduce a un primer diseño aproximado, con muchas limitaciones según se describió en 3.3.4, cuyo comportamiento frecuencial será tanto más ajustado al del circuito analógico original cuanto mayor sea la frecuencia de conmutación.

Puede elaborarse, sin embargo, un procedimiento exacto de diseño, basándose en la posibilidad de caracterizar adecuadamente los circuitos SC como sistemas discretos, mediante funciones de transferencia en la variable $z$. Tal posibilidad fue ya utilizada de forma particular en el estudio de los integradores SC. Para ello, en vez de obtener los valores de los condensadores como se ha indicado, se parte únicamente de la estructura SC encontrada y se realiza un análisis en términos de la variable $z$, basándose en el planteamiento de ecuaciones de equilibrio de carga en los terminales de entrada de los AO. De

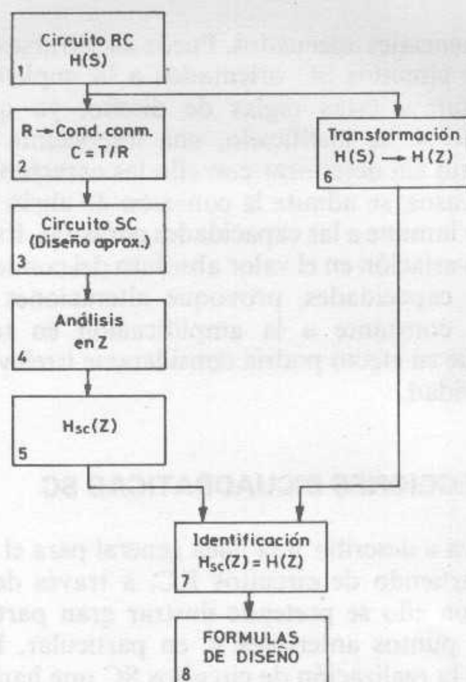



Figura 3.36 Diseño de secciones bicuadráticas SC.

esta forma se llega a la función de transferencia del bloque 5. El diseño se completa de forma similar a como se procede en el diseño de filtros digitales para el procesado de señales analógicas. Para ello, las fórmulas correspondientes, que permiten el cálculo de las capacidades del circuito SC, se obtienen identificando la función de transferencia $H_{SC}(z)$ con la obtenida aplicando la transformación bilineal a la función $H(s)$ del circuito RC. Se utiliza preferentemente esta transformación ya que, como se vio en 3.2, proyecta el eje imaginario completo del plano $s$ en la circunferencia de radio unidad del plano $z$. Por ello, se reproduce así el comportamiento frecuencial, aunque con una cierta distorsión. El proceso conduce además a sistemas discretos estables cuando se parte de sistemas continuos también estables. Por el contrario, esta característica no puede asegurarse en el diseño aproximado. Como se ve, las ventajas del diseño exacto son bastante evidentes.

Otra de las razones fundamentales que justifican su interés es la posibilidad de ensanchar muy considerablemente el margen de frecuencias utilizables, al no exigirse que la frecuencia de conmutación sea comparativamente muy superior a ellas, para garantizar que los resultados reales coincidan con los previstos. Debe tenerse en cuenta que la frecuencia de conmutación es la que realmente está limitada por los aspectos tecnológicos.

### 3.5.1 Circuito RC inicial

En la figura 3.37 se representa el diagrama de la sección bicuadrática RC que se va a utilizar como punto de partida.

Aplicando las técnicas de análisis descritas en el capítulo 2 se obtiene la función de transferencia

$$H(s)=\frac{V_0(s)}{V_i(s)}=\frac{C_2/C_1 s^2+1/R_2C_1s+1/R_1R_3C_1^2}{s^2+1/R_4C_1s+1/R_3^2C_1^2} \tag{3.78}$$

que se ajusta a la forma general

$$H(s)=-\frac{k_2s^2+k_1s+k_0}{s^2+\omega_0/Qs+\omega_0^2} \tag{3.79}$$

y por identificación se obtienen las fórmulas de diseño

$$\begin{aligned} R_1&=\omega_0/k_0C_1 & R_4&=Q/\omega_0C_1 \\ R_2&=1/k_1C_1 & C_2&=k_2C_1 \\ R_3&=1/\omega_0C_1 \end{aligned} \tag{3.80}$$

que permiten determinar los valores de los elementos del circuito en función de los parámetros de la función de transferencia. El valor de $C_1$ se fija arbitrariamente.

Como puede comprobarse, el resistor R no interviene en la función de red y con los restantes elementos pueden ajustarse independientemente cada uno de los parámetros. En efecto, salvo en el término de grado cero del denominador, en cada uno de los restantes aparece un elemento específico que no figura en los demás.

Desde el punto de vista de la realización RC podría ser preferible una

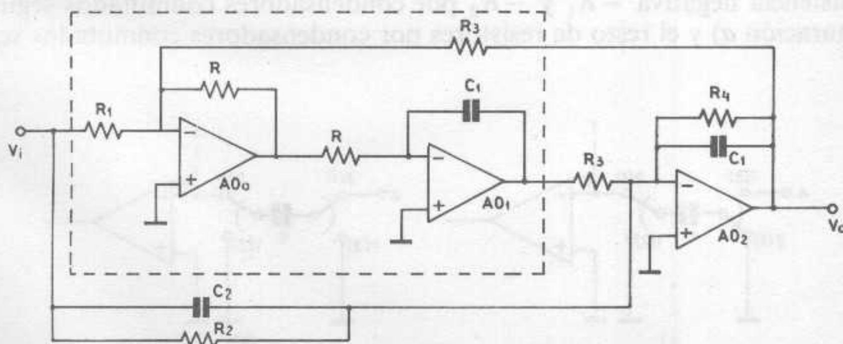



Figura 3.37 Sección bicuadrática RC.

estructura con sólo dos condensadores (número mínimo), aunque fuera necesario un mayor número de resistores. Sin embargo, respecto a su transformación en un circuito SC equivalente ocurre lo contrario, ya que los condensadores pueden mantenerse como tales, aunque obviamente no con los mismos valores, mientras que los resistores deben ser sustituidos por condensadores conmutados y, por tanto, su realización resulta más complicada.

Puede observarse también que el circuito seleccionado se adapta en principio a las reglas descritas en 3.4 para conseguir un circuito SC insensible a las capacidades parásitas, ya que no hay nodos formados por la conexión únicamente de elementos pasivos. Estos nodos conducirían a nodos capacitivos no admisibles en los circuitos de precisión, tal como se ha justificado en 3.4.4.

### 3.5.2 Obtención de la topología del circuito SC

Para obtener la topología del circuito SC hay que sustituir cada uno de los resistores por condensadores conmutados. Para ello se dispone de dos posibilidades distintas que corresponden a las utilizadas en los integradores SC insensibles a las capacidades parásitas, descritos en 3.4.3, y que se reproducen en la figura 3.38. Mientras que la conexión *b*) conducía a un integrador con función de transferencia negativa, de acuerdo con la correspondiente al integrador RC, la conexión *a*), sin embargo, produce un integrador con función de transferencia positiva, lo que puede interpretarse como si la resistencia simulada tuviera signo negativo. De hecho, la carga transferida por $C$ al nodo S tiene signo contrario respecto a la que se transferiría por un resistor positivo, debido a la inversión que producen los conmutadores en la conexión de los terminales del condensador. Esta situación puede utilizarse con ventaja al obtener el circuito SC como se verá seguidamente.

El amplificador $AO_0$ del circuito de la figura 3.37 actúa como sumador inversor, por lo que si se cambia el signo de los resistores $R_1$ y $R_3$, conectados a su entrada, puede englobarse la operación de suma en el $AO_1$, suprimiendo, por consiguiente, el $AO_0$, sin alterar con ello el resultado. De esta manera, la parte recuadrada del circuito queda reducida a la que se representa en la figura 3.39. Finalmente, la estructura del circuito SC se obtiene sustituyendo los resistores de resistencia negativa $-R_1$ y $-R_3$ por condensadores conmutados según la configuración *a*) y el resto de resistores por condensadores conmutados según

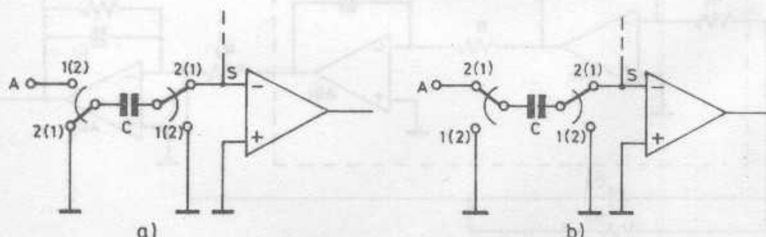



Figura 3.38 Condensadores conmutados para sustituir los resistores.

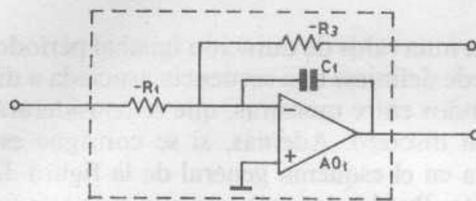



Figura 3.39 Eliminación del $AO_0$.

*b*). El circuito resultante puede verse en la figura 3.40. Los condensadores se han numerado de nuevo independientemente del circuito RC de la figura 3.37, y en el recuadro de cada condensador conmutado se indica el resistor que ha sustituido y cuya función está simulando. El funcionamiento del circuito SC así obtenido no depende de las capacidades parásitas y, si se aplica la fórmula (3.54) para la determinación de las capacidades, constituye un primer diseño cuyo comportamiento será tanto más próximo al de la sección bicuadrática RC de la que procede cuanto mayor sea la frecuencia de conmutación. El mayor interés de este proceso lo constituye, no obstante, la obtención de la estructura del circuito SC, lo que permitirá, tras su análisis en la variable *z*, completar la línea de diseño exacto.

### 3.5.3 Análisis en la variable *z*

El objetivo del análisis en la variable *z* del circuito SC al que se ha llegado es la obtención de una función de transferencia $H(z)$ y, por tanto, su caracterización como sistema discreto.

En principio puede considerarse como propiedad deseable que la tensión de

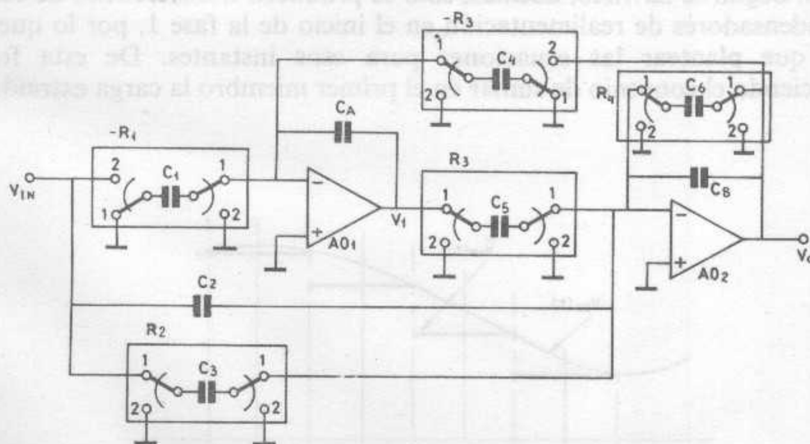



Figura 3.40 Sección bicuadrática SC.

salida sea constante a intervalos de duración igual al período de muestreo $T$. De esta manera sólo puede definirse una secuencia asociada a dicha tensión, con un espaciado de $T$ segundos entre muestras, que se considerará como la secuencia de salida del sistema discreto. Además, si se consigue esta característica, el bloque $S/H$ de salida en el esquema general de la figura 3.18 queda realizado también por el circuito. Puede comprobarse que, con esta finalidad, las fases en los conmutadores se han asignado de manera que los condensadores conmutados únicamente transfieran carga a los condensadores de realimentación $C_A$ y $C_B$ al inicio de la fase 1. De esta forma se evitan las discontinuidades de las tensiones a la salida de los AO en las transiciones de la fase 1 a la 2. Sin embargo, se observa que el $AO_2$ permanece conectado al nodo de entrada a través de los condensadores $C_2$ y $C_3$ durante la fase 1 y únicamente por $C_2$ en la fase 2. Cuando se da esta situación se dice que hay conexión directa entre entrada y salida. Ello provoca que la tensión $v_0$ siga las variaciones de la tensión $v_{IN}$. Por ello, si la tensión de salida debe ser constante a intervalos de duración $T$, la tensión de entrada tiene que ser del mismo tipo. Por otra parte, se observa que la tensión $v_{IN}$ es muestreada por $C_1$ y $C_2$ al final de la fase 2, mientras que también es muestreada por $C_2$ y $C_3$ al final de la fase 1. Si se quiere asignar una sola secuencia, con muestras espaciadas $T$ segundos, para describir la señal de entrada, en correspondencia con la secuencia de salida, los valores obtenidos de $v_{IN}$ en cada intervalo de duración $T$ deben ser los mismos. En conclusión, la tensión de entrada ha de ser constante a intervalos de duración $T$, tal como se representa en la figura 3.41. Para ello, habrá que intercalar un módulo $S/H$ cuya respuesta se designará por $\bar{v}_{IN}(t)$. Como consecuencia, en este circuito la tensión a la salida va a tener la misma característica.

Para proceder al análisis, hay que plantear las ecuaciones de equilibrio de carga, en modo similar a como se hizo para los integradores. En este caso habrá una ecuación asociada a cada una de las entradas de los AO ya que, al fin y al cabo, tales ecuaciones pueden considerarse como ecuaciones KCL en forma integral. Según se ha visto, además, sólo se producen transferencias de carga a los condensadores de realimentación en el inicio de la fase 1, por lo que sólo habrá que plantear las ecuaciones para esos instantes. De esta forma, estableciendo el convenio de sumar en el primer miembro la carga extraída por

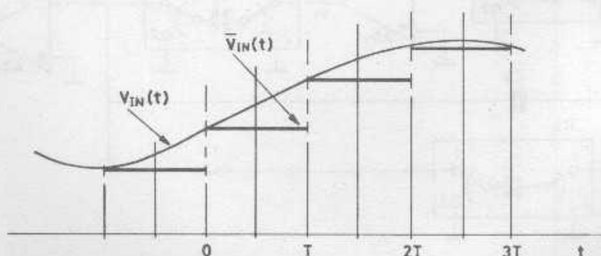



Figura 3.41 Tensión de entrada muestreada y retenida en $T$.

todos los condensadores, excepto el de realimentación, y en el segundo miembro la carga perdida por este último, se obtienen las ecuaciones

$$\text{AO}_1\text{: } C_1 v_{IN}(n-1) + C_4 v_0(n-1) = C_A[v_1(n) - v_1(n-1)] \qquad (3.81a)$$

$$\text{AO}_2\text{: } -C_5 v_1(n) - C_6 v_0(n) - C_3 v_{IN}(n) - $$
$$- C_2[v_{IN}(n) - v_{IN}(n-1)] = C_B[v_0(n) - v_0(n-1)] \qquad (3.81b)$$

Aplicando la transformada $Z$ y agrupando las ecuaciones resultantes se llega al sistema

$$\begin{bmatrix} -C_A(1-z^{-1}) & C_4 z^{-1} \\ -C_5 & -C_6 - C_B(1-z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_4 z^{-1} \\ C_3 + C_2(1-z^{-1}) \end{bmatrix} v_{IN} \qquad (3.82)$$

Si cada una de sus ecuaciones se divide por la capacidad del condensador de realimentación del AO correspondiente, la operación equivale a normalizar respecto a esta capacidad todos los condensadores que se conecten a la entrada de cada uno de los AO. Por ello, si se hace $C_A = C_B = 1$, el resto de condensadores, en el resultado que se obtenga, representarán las capacidades relativas respecto a las de los condensadores de realimentación de los AO a los que se conecten.

Resolviendo el sistema para $V_0(z)$, después de su normalización, se obtiene finalmente la función de transferencia

$$H_1(z) = \frac{V_0(z)}{V_{IN}(z)} = -\frac{(C_2+C_3) + (C_1C_5 - C_3 - 2C_2)z^{-1} + C_2 z^{-2}}{(1+C_6) + (C_4C_5 - C_6 - 2)z^{-1} + z^{-2}} \qquad (3.83)$$

Este resultado, en función de capacidades relativas, pone de manifiesto de nuevo la propiedad general ya mencionada de los circuitos SC, consistente en

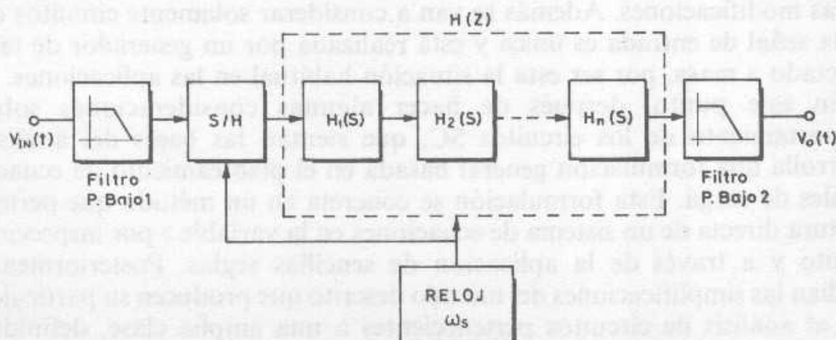



Figura 3.42 Filtro SC realizado por conexión en cascada de secciones bicuadráticas.

que su comportamiento no depende de los valores absolutos de las capacidades, sino de relaciones entre las mismas.

La función de transferencia encontrada caracteriza al circuito SC de la figura 3.40 como un sistema discreto. Como se ha supuesto que la tensión de entrada era constante a tramos, en la construcción del sistema muestreado en que se utilice, se necesita el módulo S/H de entrada. Por otra parte, como por la especial disposición de los conmutadores, la tensión de salida es ya constante a tramos de duración $T$, además de no necesitarse el módulo S/H de salida, pueden ser conectadas directamente varias secciones similares en cascada. De esta manera, pueden diseñarse filtros de hasta décimo orden que son habituales en las aplicaciones. En la figura 3.42 se ha representado el diagrama de bloques de un filtro SC basado en este procedimiento.

## 3.6 ANALISIS FRECUENCIAL DE CIRCUITOS SC

La gran difusión que han tenido en los últimos años los circuitos SC y el cada vez mayor ámbito de su aplicación, han impulsado el desarrollo de distintos métodos de análisis que permitieran, de forma cada vez mas precisa, la evaluación de los diseños cuya complejidad ha ido creciendo.

En la bibliografía sobre el tema pueden encontrarse numerosos métodos que resuelven eficientemente el problema del análisis en sus dos vertientes: frecuencial y temporal, y a diferentes niveles, pudiéndose llegar incluso hasta la simulación completa, partiendo de las especificaciones individuales de los dispositivos MOS.

Las diferencias entre los distintos métodos radican fundamentalmente en las técnicas utilizadas en la formulación de las ecuaciones. Los más frecuentes son: los básados en las variables de estado, los métodos nodales y algunos otros que se fundamentan en la obtención de modelos equivalentes de circuitos SC elementales, para así poder utilizar los programas generales de análisis de circuitos.

En lo sucesivo, por razones de simplicidad en los desarrollos, se va a tratar exclusivamente sobre circuitos SC bifásicos, aunque la mayor parte de los conceptos implicados son fácilmente generalizables a circuitos polifásicos sin apenas modificaciones. Además se van a considerar solamente circuitos en los que la señal de entrada es única y está realizada por un generador de tensión conectado a masa, por ser esta la situación habitual en las aplicaciones.

En este punto, después de hacer algunas consideraciones sobre el comportamiento de los circuitos SC, que sientan las bases del análisis, se desarrolla una formulación general basada en el planteamiento de ecuaciones nodales de carga. Esta formulación se concreta en un método que permite la escritura directa de un sistema de ecuaciones en la variable $z$ por inspección del circuito y a través de la aplicación de sencillas reglas. Posteriormente, se estudian las simplificaciones del método descrito que producen su particularización al análisis de circuitos pertenecientes a una amplia clase, definida por algunas restricciones topológicas, y que engloba a la casi totalidad de los circuitos SC que se encuentran actualmente en las aplicaciones. Esta

particularización conduce al método concreto que corresponde al programa de simulación de circuitos SC que se describe e incluye en este texto.

Finalmente, la respuesta frecuencial se deriva partiendo del sistema de ecuaciones obtenido y mediante ciertas funciones de transferencia en la variable $z$, en modo similar a como se procedió en el estudio introductorio sobre los integradores y en el análisis de secciones bicuadráticas del punto anterior, pero con mayor generalidad en el sentido de no presuponer ninguna condición a las fases de los conmutadores.

### 3.6.1 Consideraciones sobre el comportamiento de los circuitos SC. Definición de secuencias

Como se deduce de su definición, el comportamiento de un circuito SC en cada fase puede analizarse considerándolo como un circuito con AO en el que los únicos elementos pasivos son condensadores con condiciones iniciales, en general no nulas, adquiridas en la fase anterior.

En cada conmutación, que produce el cambio entre las topologías correspondientes a las fases, se realiza una redistribución de carga, que será instantánea al no haber resistores, y se traducirá en ciertas discontinuidades de las tensiones nodales. Durante la fase iniciada por cada conmutación el circuito no tendrá dinámica propia, por lo que las tensiones nodales seguirán las variaciones de la señal de entrada $v_{IN}(t)$.

En la figura 3.43 se representa la forma que va a tener en general cualquier tensión nodal del circuito, considerada como señal de salida, para una señal de entrada continuamente variable. En particular, si $v_{IN}(t)$ fuera constante a

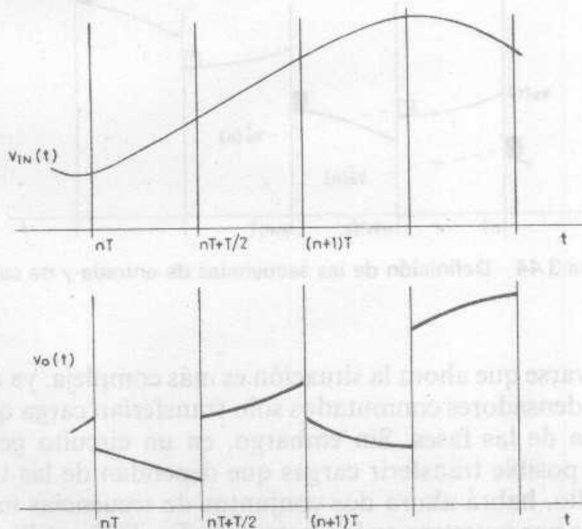



Figura 3.43 Señales de entrada y de salida en un circuito SC.

intervalos, coincidentes con las fases, las tensiones nodales serían igualmente constantes a intervalos. Puede darse también la posibilidad de que durante alguna de las fases, o incluso en ambas, no exista una conexión directa entre el generador de tensión de entrada y el nodo de salida. En ese caso, la tensión en este nodo sería constante aunque la señal de entrada variara con el tiempo, ya que sólo estaría determinada por las condiciones iniciales.

Por otra parte, como las condiciones iniciales adquiridas por los condensadores, según el mecanismo descrito, dependen del valor de las tensiones nodales y de la tensión de entrada al final de la fase anterior, parece razonable definir secuencias por muestreo sobre las señales de entrada y de salida en los instantes inmediatamente anteriores a las conmutaciones y tratar de obtener relaciones entre estas secuencias. En este sentido, aunque de forma particular, se procedió en 3.3 y 3.5 para obtener funciones de transferencia en la variable $z$ asociadas a los integradores SC y a un circuito de segundo orden, respectivamente.

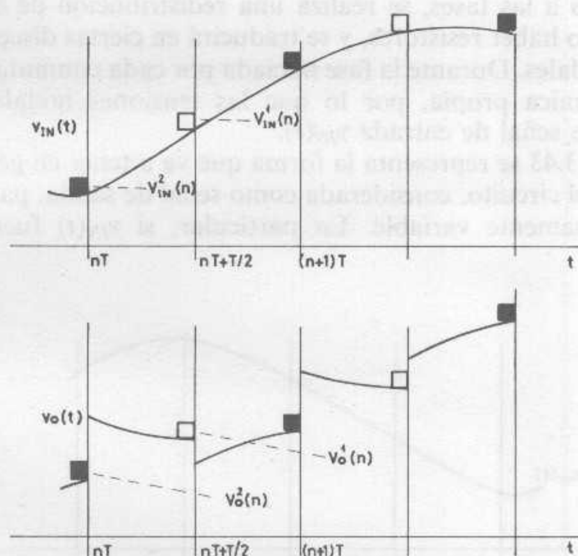



Figura 3.44 Definición de las secuencias de entrada y de salida.

Puede observarse que ahora la situación es más compleja, ya que en aquellos circuitos los condensadores conmutados sólo transferían carga que dependía de tensiones en una de las fases. Sin embargo, en un circuito general, hay que admitir que sea posible transferir cargas que dependan de las tensiones en las dos fases. Por ello, habrá ahora dos conjuntos de secuencias imbricadas en el tiempo, definidas por muestreo en los instantes $nT + T/2^{-}$ y $nT^{-}$ respectivamente, tal como se indica en la figura 3.44, y que quedan definidas por

$$
\begin{aligned}
v_j^1(n) &= v_j(nT + T/2^-) \\
v_j^2(n) &= v_j(nT^-)
\end{aligned}
\tag{3.84}
$$

y las correspondientes consecuencias transformadas

$$
\begin{aligned}
v_j^1(n) &\xrightarrow{\;z\;} V_j^1(z) \\
v_j^2(n) &\xrightarrow{\;z\;} V_j^2(z)
\end{aligned}
\tag{3.85}
$$

Según se ve en estas expresiones, los superíndices indican la fase en la que se definen las muestras.

En lo sucesivo se va a considerar, como primer objetivo del análisis de un circuito SC, la determinación de las relaciones entre las secuencias definidas sobre la señal de salida y las correspondientes a la señal de entrada, en función de los parámetros del circuito. En los próximos apartados se desarrolla un método que permite la obtención de tales relaciones a través del planteamiento de las ecuaciones de equilibrio en ambas fases.

### 3.6.2 Formulación general. Planteamiento de las ecuaciones

Se considera ahora un circuito SC con $m$ condensadores y se supone situado en la fase 1, correspondiente a los intervalos $(nT,\ nT+T/2)$. Según el comportamiento descrito en el apartado anterior, cada condensador $C_j$ al inicio del intervalo concreto es portador de una condición inicial $v_{C_j}(nT^-)$ que puede representarse por un generador de corriente de valor

$$
I_j = C_j v_{Cj}(nT^-) \tag{3.86}
$$

en un circuito transformado de Laplace con el origen de tiempos situado en el instante $nT$. En general, el generador de entrada estará conectado al resto del circuito por varios condensadores, tal como puede verse en la figura 3.45. El

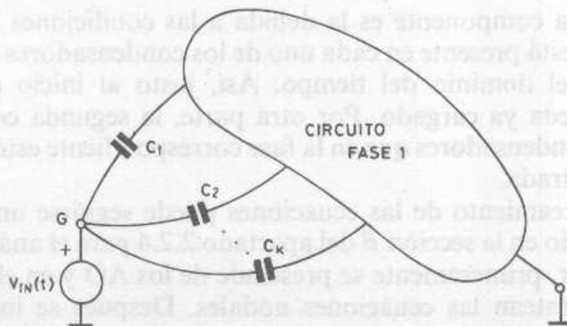



Figura 3.45 Conexión del generador de entrada.

número de tensiones nodales distintas de cero, excluyendo la tensión de entrada $v_{IN}$, se designa por $n_1$ y se admite la posibilidad de que sea distinto en cada fase, llamándose $n_2$ al correspondiente a la fase 2. Debe observarse que este número sólo coincide con el de nodos con tensiones no nulas cuando todos los AO llevan el terminal positivo puesto a masa. En caso contrario, es decir, cuando un AO está en modo diferencial, se asigna la misma tensión a los nodos a los que se conectan los terminales de entrada y, por tanto, el número de nodos aludido es mayor que $n_1$ o $n_2$ según la fase de que se trate.

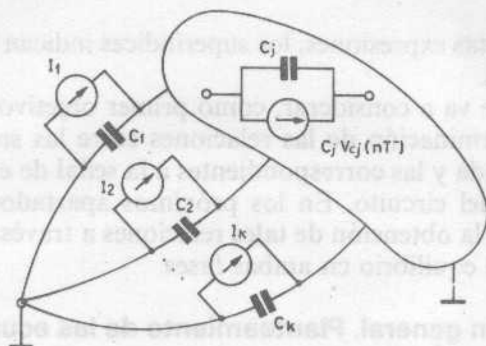



Figura 3.46 Transformación del generador de entrada.

Con objeto de proceder a un análisis nodal del circuito ya transformado, el generador de entrada se mueve a través del nodo $G$ y se transforma en generadores de corriente, según se describió en la sección $A$ del apartado 2.2.4. Estos generadores de corriente van a quedar en paralelo con los de condiciones iniciales, por lo que pueden reducirse sumando sus corrientes, tal como se ilustra en la figura 3.46, siendo $I_K$ la corriente total de cada generador, con lo que vendrá dada por

$$I_K = C_K v_{CK}(nT^-) + C_K s V_{IN}(s) \tag{3.87}$$

donde la primera componente es la debida a las condiciones iniciales, por lo que, en general, está presente en cada uno de los condensadores y corresponde a un impulso en el dominio del tiempo. Así, justo al inicio del intervalo el condensador queda ya cargado. Por otra parte, la segunda componente sólo aparece en los condensadores que en la fase correspondiente estén conectados al generador de entrada.

Para el planteamiento de las ecuaciones puede seguirse un procedimiento similar al utilizado en la sección $B$ del apartado 2.2.4 para el análisis de circuitos con AO. Es decir, primeramente se prescinde de los AO y en el circuito pasivo resultante se plantean las ecuaciones nodales. Después se incluyen los AO, reduciendo para ello el sistema inicial según las operaciones que allí se describen.

De esta manera puede llegarse a un sistema, para el circuito de la figura 3.46, válido para la fase 1, de la forma

$$s\underset{\sim}{C}_1\underline{V}^r_1=\underline{I}_1 \tag{3.88}$$

donde:

$s\underset{\sim}{C}_1$ es la matriz de admitancia en la fase 1, modificada de acuerdo con la incorporación de los AO.

$\underline{V}^r_1$ es el vector de las tensiones nodales distintas de cero, durante la fase 1, excluida la tensión de entrada.

$\underline{I}_1$ es un vector columna que tiene como elementos la suma de corrientes entrantes, en cada nodo, por los generadores de corriente conectados a él.

Debe tenerse en cuenta que, tal como se describía en la sección *B* del apartado 2.2.4, el proceso de reducción del sistema inicial de ecuaciones nodales para incluir los AO implica la eliminación de las ecuaciones KCL planteadas en los nodos conectados a terminales de salida de AO. Por ello, en el vector $\underline{I}_1$ quedan excuidos los términos correspondientes a esos nodos y su dimensión coincide con $n_1$.

Como las condiciones iniciales en los condensadores pueden obtenerse analizando el circuito, durante la fase anterior, mediante un sistema análogo, interesa separar las distintas componentes del vector $\underline{I}_1$, con el fin de ir hacia la obtención de un único sistema de ecuaciones que describa la evolución del circuito en las dos fases. Así, el sistema (3.88) podrá reescribirse de la forma

$$s\underset{\sim}{C}_1\underline{V}^r_1=\underline{I}^c_1+\underline{I}^g_1 \tag{3.89}$$

donde $\underline{I}^c_1$ está formado por las corrientes de los generadores de condiciones iniciales y en $\underline{I}^g_1$ solamente intervienen las corrientes que dependen del generador de entrada. O, dicho de otra forma, los que resultan de mover dicho generador a través del nodo distinto al de referencia.

Por otra parte, tal como se deduce de (3.87) y de la figura 3.46, el vector $\underline{I}^g_1$ puede expresarse en función de la tensión de entrada según

$$\underline{I}^g_1=s\underline{C}^g_1V_{IN} \tag{3.90}$$

donde el vector $\underline{C}^g_1$ tiene por elementos las capacidades de los condensadores que conectan al nodo de entrada con cada uno de los $n_1$ nodos del circuito, donde quedan planteadas finalmente las ecuaciones KCL.

El paso siguiente consistirá en expresar $\underline{I}^c_1$ en función de las tensiones nodales particularizadas en el instante $nT^-$ y, por tanto, obtenidas en el análisis realizado para la fase anterior.

Según la expresión (3.86) y teniendo en cuenta la definición del vector $\underline{I}^c_1$ en el sistema (3.89), cada elemento del mismo será una combinación lineal de las tensiones iniciales en los condensadores $v_{Cj}(nT^-)$. Por otra parte, cada una de éstas puede obtenerse como diferencia de las tensiones de los dos nodos, entre los que cada condensador estaba conectado. Puede concluirse entonces que

cada término del vector $\underline{I}_1^c$ podrá obtenerse como combinación lineal de las tensiones nodales de la fase anterior, incluida la tensión de entrada, particularizadas en el instante $nT^-$, inmediatamente anterior a la conmutación. De esta manera podrá encontrarse una matriz, denominada $\underset{\sim}{C}_{12}$, tal que

$$\underline{I}_1^c = -\underset{\sim}{C}_{12}\underline{v}_2(nT^-) \tag{3.91}$$

siendo

$$\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} \underline{v}_2^r \\ v_{IN} \end{bmatrix} \tag{3.92}$$

donde $\underline{v}_2^r$ es el vector de dimensión $n_2$, cuyos términos son ahora las tensiones nodales durante la fase 2, excluida la tensión de entrada. El signo menos se debe únicamente a razones de uniformidad en los resultados finales.

La matriz $\underset{\sim}{C}_{12}$ es, por tanto, una matriz de $n_1$ filas y $n_2+1$ columnas, y puede considerarse que representa la influencia de la evolución del circuito durante la fase 2 sobre su comportamiento en la fase 1. El procedimiento a seguir para su obtención se describirá más adelante.

Sustituyendo (3.90) y (3.91) en el sistema (3.89) se obtiene

$$s\underset{\sim}{C}_1\underline{V}_1^r = -\underset{\sim}{C}_{12}\underline{v}_2(nT^-) + s\underline{C}_1^q V_{IN} \tag{3.93}$$

Dividiendo ambos miembros por $s$ resulta

$$\underset{\sim}{C}_1\underline{V}_1^r = -\frac{1}{s}\underset{\sim}{C}_{12}\underline{v}_2(nT^-) + \underline{C}_1^q V_{IN} \tag{3.94}$$

Y aplicando ahora la transformación inversa de Laplace se tendrá

$$\underset{\sim}{C}_1\underline{v}_1^r(t) = -\underset{\sim}{C}_{12}\underline{v}_2(nT^-) + \underline{C}_1^q v_{IN}(t) \tag{3.95}$$

Este sistema de ecuaciones permite resolver el vector $\underline{v}_1^r(t)$ de las tensiones nodales en el dominio temporal en los intervalos de tiempo $(nT, nT+T/2)$ asociados a la fase 1. Tal como se ve, multiplicando a la izquierda en ambos miembros por la inversa de la matriz $\underset{\sim}{C}_1$, cada tensión nodal tendrá dos componentes distintas: una constante, que depende de las condiciones iniciales, y la otra variable con el tiempo y proporcional a la tensión de entrada. Este resultado, como se había anticipado ya, es una consecuencia del carácter no dinámico del circuito en cada fase al tener únicamente condensadores como elementos pasivos.

Siguiendo un procedimiento análogo para el análisis durante la fase 2, se llega al sistema

$$\underset{\sim}{C}_2\underline{v}_2^r(t) = -\underset{\sim}{C}_{21}\underline{v}_1(nT+T/2^-) + \underline{C}_2^q v_{IN}(t) \tag{3.96}$$

válido para los intervalos $(nT+T/2, (n+1)T)$.

Puede observarse que realmente (3.95) y (3.96) son sistemas de ecuaciones nodales de equilibrio de carga y se podrían haber obtenido sin recurrir al circuito transformado de Laplace. Sin embargo, se ha preferido proceder en este sentido por razones de continuidad con los métodos de análisis de circuitos desarrollados en capítulos precedentes.

### 3.6.3 Obtención de las ecuaciones en la variable *z*

Para el encadenamiento de los sistemas (3.95) y (3.96) resulta más cómodo pasar en ambos el término dependiente de $v_{IN}(t)$ al primer miembro, dado que esta tensión, particularizada en los instantes $nT^-$ y $nT+T/2^-$, aparece ya en los vectores $v_2$ y $v_1$ respectivamente. Procediendo de este modo para (3.95) se tendrá

$$[\underset{\sim}{C}_1 \mid -\underline{C}_1^q]\, \underline{v}_1(t) = -\underset{\sim}{C}_{12}\underline{v}_2(nT^-) \tag{3.97}$$

donde el vector $\underline{C}_1^q$, cambiado de signo, se ha englobado en la matriz $\underset{\sim}{C}_1$ y la tensión $v_{IN}(t)$ junto con el vector $\underline{v}_1'(t)$ forma el vector $\underline{v}_1(t)$, ya definido.

Puede observarse que, debido a la definición del vector $\underline{C}_1^q$, su incorporación a la matriz $\underset{\sim}{C}_1$, permite la construcción directa de la matriz ampliada, con las mismas reglas que se aplican a la obtención de una matriz de admitancia, prescindiendo de la $s$, sin más que considerar al nodo de entrada, de tensión $v_{IN}$, como el nodo $n_1+1$.

Realizando el mismo proceso en el sistema (3.96) se llega a

$$[\underset{\sim}{C}_2 \mid -\underline{C}_2^q]\, \underline{v}_2(t) = -\underset{\sim}{C}_{21}\underline{v}_1(nT+T/2^-) \tag{3.98}$$

Particularizando (3.97) y (3.98) en los instantes $nT+T/2^-$ y $(n+1)T^-$ respectivamente y teniendo en cuenta la definición de secuencias hecha en 3.6.1, se obtiene

$$\underset{\sim}{C}_{11}\underline{v}^1(n) = -\underset{\sim}{C}_{12}\underline{v}^2(n) \tag{3.99a}$$

y

$$\underset{\sim}{C}_{22}\underline{v}^2(n+1) = -\underset{\sim}{C}_{21}\underline{v}^1(n) \tag{3.99b}$$

donde

$$\underset{\sim}{C}_{11} = [\underset{\sim}{C}_1 \mid -\underline{C}_1^q] \tag{3.100a}$$

y

$$\underset{\sim}{C}_{22} = [\underset{\sim}{C}_2 \mid -\underline{C}_2^q] \tag{3.100b}$$

Los sistemas (3.99) permiten obtener de forma recurrente las secuencias definidas sobre cada tensión nodal y, junto con (3.95) y (3.96), pueden formar la base para un método de análisis de circuitos SC en el dominio temporal.

Sin embargo, con respecto al estudio de la respuesta frecuencial, interesa obtener relaciones entre las secuencias en el dominio de la variable $z$. Para ello, transformando los sistemas (3.99) se obtiene

$$\underset{\sim}{C}_{11}\underline{V}^1(z) = -\underset{\sim}{C}_{12}\underline{V}^2(z) \qquad (3.101a)$$

y

$$\underset{\sim}{C}_{22}z\underline{V}^2(z) = -\underset{\sim}{C}_{21}\underline{V}^1(z) \qquad (3.101b)$$

Estos dos conjuntos de ecuaciones pueden agruparse en un único sistema de la forma

$$\underset{\sim}{C}\cdot\underline{V}(z) = 0 \qquad (3.102)$$

donde

$$\underline{V}(z) = \left[\begin{array}{c} \underline{V}^1 \\ \hline \underline{V}^2 \end{array}\right] \qquad (3.103)$$

y

$$\underset{\sim}{C} = \left[\begin{array}{c|c} \underset{\sim}{C}_{11} & \underset{\sim}{C}_{12} \\ \hline \underset{\sim}{C}_{21} & z\underset{\sim}{C}_{22} \end{array}\right] \qquad (3.104)$$

Este sistema de ecuaciones permite finalmente la obtención de las secuencias transformadas, definidas sobre las tensiones nodales, en función de las correspondientes a la tensión de entrada $v_{IN}(t)$, tal como se pretendía.

### 3.6.4 Construcción de la matriz del sistema

En la construcción de la matriz $\underset{\sim}{C}$ solamente queda por describir el procedimiento para obtener las submatrices $\underset{\sim}{C}_{12}$ y $\underset{\sim}{C}_{21}$, ya que, como se ha visto, $\underset{\sim}{C}_{11}$ y $\underset{\sim}{C}_{22}$ tienen estructura de matrices de admitancia nodal prescindiendo de la variable $s$ y modificadas de acuerdo con la incorporación de los AO. Su obtención, por tanto, puede realizarse mediante los procedimientos descritos en el capítulo 2, partiendo de la estructura del circuito en las dos fases.

Para construir $\underset{\sim}{C}_{12}$ y $\underset{\sim}{C}_{21}$ se va a estudiar por separado la aportación generada por cada uno de los condensadores.

En la figura 3.47 se representa el conexionado de un condensador $C_K$ que, según la definición de $\underset{\sim}{C}_{12}$ contenida en (3.91), puede intervenir en su construcción. Esto es debido a que la condición inicial distinta de cero, adquirida durante la fase 2, va a a repercutir en el establecimiento del equilibrio de carga durante la fase 1, si al menos uno de los nodos enlazados por el condensador tras la conmutación no está conectado a la salida de un AO, ni al generador de entrada, ni a masa; ya que sólo en este caso habrá en el sistema una ecuación KCL planteada para dicho nodo. Se va a suponer que el nodo l cumple esta condición.

Figura 3.47 Conmutación de un condensador.

En esta última figura, la corriente del generador de condiciones iniciales vendrá dada por

$$I_K = C_K[v_i^2(nT^-) - v_j^2(nT^-)] \qquad (3.105)$$

Obsérvese que es necesario asignar al condensador una polaridad de referencia que permita distinguir los terminales entre sí, para poder especificar sin ambigüedad la conmutación entre las dos estructuras en cuanto al signo de las condiciones iniciales.

En la figura 3.48 se ha representado la expresión (3.91) desarrollada para ilustrar la aportación del condensador $C_K$ en la formación de $\underset{\sim}{C}_{12}$. Según la definición del vector $\underline{I}_1^c$, en el término l debe aparecer la suma de corrientes entrantes al nodo correspondiente por los generadores de condiciones iniciales. De esta manera, en esta suma tiene que figurar la corriente $I_K$, lo que, según (3.105), implica la aparición de los términos $-C_K$ y $C_K$ en la fila l de $\underset{\sim}{C}_{12}$, sobre las columnas $i$ y $j$ respectivamente, como se refleja en la figura.

Si fuese el nodo $m$, en referencia a la figura 3.47, el que llevara asociada una ecuación en el sistema, tendrían que aparecer en la fila $m$ los dos términos sobre las mismas columnas, pero cambiados de signo, puesto que ahora la corriente del generador sería saliente respecto al nodo $m$. Estas aportaciones se han representado también en la figura 3.48.

Puede admitirse la posibilidad de que en ambos nodos, $l$ y $m$, haya que plantear ecuaciones. En este caso, el condensador $C_K$ aportaría los cuatro

Figura 3.48 Construcción de la submatriz $C_{12}$.

términos descritos en la construcción de la matriz. Sin embargo, esta situación no se presenta en la práctica ya que, como se vio en 3.4.4, este tipo de conexión genera estructuras cuyo comportamiento depende de las capacidades parásitas.

El camino descrito para obtener la aportación de cada condensador en la submatriz $\underset{\sim}{C}_{12}$ es igualmente válido para construir la submatriz $\underset{\sim}{C}_{21}$, intercambiando simplemente el papel de las estructuras correspondientes a cada fase, y completa un método que permite la escritura de la matriz $\underset{\sim}{C}$ de forma muy directa por simple inspección de la topología del circuito SC.

El proceso completo a seguir puede estructurarse en las siguientes etapas:

1. En primer lugar se dimensiona la matriz $\underset{\sim}{C}$ a partir de las topologías del circuito a analizar en las dos fases y de acuerdo con la figura 3.49, donde $n_1$ y $n_2$ son los números de tensiones nodales durante las fases 1 y 2 respectivamente. Las $n_1$ primeras filas, $\underset{\sim}{C}_{11}$ y $\underset{\sim}{C}_{12}$, corresponden a las ecuaciones planteadas en la fase 1 y las $n_2$ restantes, $\underset{\sim}{C}_{21}$ y $\underset{\sim}{C}_{22}$, a las planteadas para la fase 2.

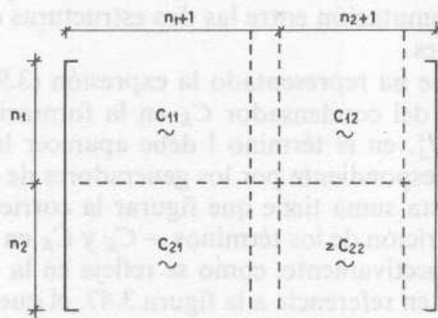



Figura 3.49 Dimensionado de la matriz $C$.

2. Seguidamente se escriben las submatrices $\underset{\sim}{C}_{11}$ y $\underset{\sim}{C}_{22}$, teniendo en cuenta su estructura de matrices de admitancia prescindiendo de la variable $s$, reducidas según la incorporación de los AO en cada una de las topologías y con la particularidad de incluir una columna más correspondiente a la tensión de entrada. En la expresión final de $\underset{\sim}{C}$ todos los términos de $\underset{\sim}{C}_{22}$ deben multiplicarse por la variable $z$.
3. Finalmente se construyen la submatrices $\underset{\sim}{C}_{12}$ y $\underset{\sim}{C}_{21}$, teniendo en cuenta la posible contribución de cada condensador según el procedimiento esquematizado en la figura 3.48. Para ello, sólo hay que considerar los condensadores $C_K$ que, en las fases 1 y 2, respectivamente, estan conectados a nodos que lleven asociada una ecuación KCL. Situando los términos $-C_K$ y $C_K$ en las columnas definidas por los nodos a los que cada uno de estos condensadores estaba conectado en la fase anterior.

*Ejemplo 3.3*

El método descrito se aplica ahora, como ilustración, para obtener la matriz $\underset{\sim}{C}$ correspondiente al circuito SC de la figura 3.50*a*).

En las figuras 3.50*b*) y *c*) se han representado las estructuras del circuito correspondiente a las fases 1 y 2 respectivamente. Los nodos están marcados con números en círculos y, como puede observarse, en este caso, $n_1 = n_2 = 2$. Por otra parte, la numeración de los nodos se ha realizado de la forma más coincidente posible en ambas fases, lo que facilita la interpretación de los resultados. En la figura 3.51 se ha representado la matriz $\underset{\sim}{C}$ resultante.

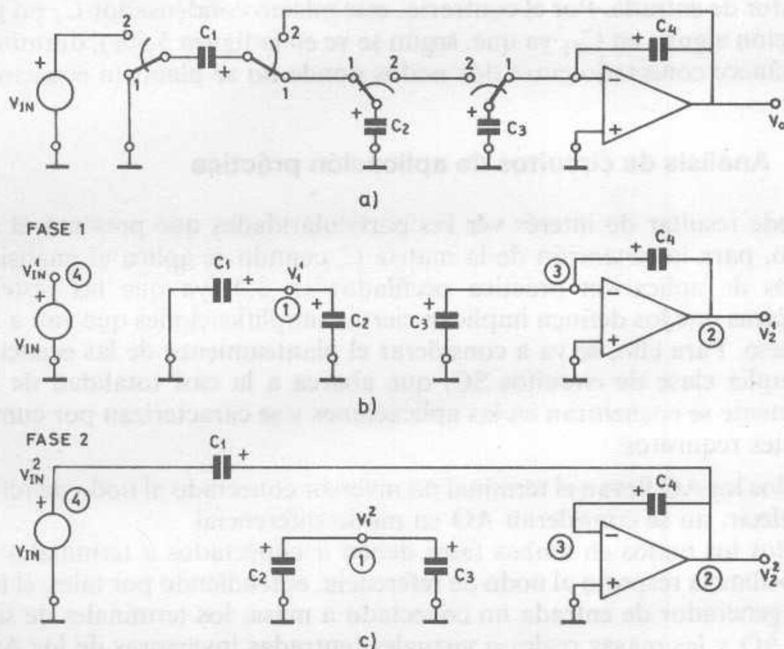



Figura 3.50 *a*) Circuito SC. *b*) y *c*) Topologías en las fases 1 y 2.

| | | 1 | 2 | 4 | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| FASE 1 | 1 | $C_1+C_2$ | 0 | 0 | $-C_2$ | $-C_1$ | $C_1$ |
| | 3 | 0 | $-C_4$ | 0 | $-C_3$ | $C_4$ | 0 |
| FASE 2 | 1 | $-C_2$ | 0 | 0 | $(C_2+C_3)Z$ | 0 | 0 |
| | 3 | 0 | $C_4$ | 0 | 0 | $-C_4 Z$ | 0 |

Figura 3.51 Matriz *C* del circuito de la figura 3.50*a*.

Según se indica a la izquierda, las filas corresponden a las ecuaciones planteadas en los nodos 1 y 3 y, tal como se indica en la parte superior de la matriz, las columnas corresponden a las variables nodales 1, 2 y 4, donde esta última coincide con la tensión de entrada $V_{IN}$.

$\underset{\sim}{C}_{11}$ y $\underset{\sim}{C}_{22}$ se han obtenido por inspección de las figuras 3.50*a*) y *b*), respectivamente. Para obtener $\underset{\sim}{C}_{12}$ y $\underset{\sim}{C}_{21}$ hay que tener en cuenta las dos estructuras. Por ejemplo, en la fase 1, el condensador $C_1$ esta conectado con su terminal (+) al nodo 1, donde debe plantearse una ecuación. Por tanto, contribuye en la construcción de $\underset{\sim}{C}_{12}$, con un termino $-C_1$ en la columna 2, correspondiente al nodo donde estaba conectado el terminal (+) en la fase 1, y un término $C_1$ en la columna 4, ya que el otro terminal estaba conectado al generador de entrada. Por el contrario, este mismo condensador $C_1$ no produce aportación alguna en $\underset{\sim}{C}_{21}$ ya que, según se ve en la figura 3.50*c*), durante la fase 2 permanece conectado entre dos nodos donde no se plantean ecuaciones.

### 3.6.5 Análisis de circuitos de aplicación práctica

Puede resultar de interés ver las particularidades que presenta el método descrito, para la obtención de la matriz $\underset{\sim}{C}$, cuando se aplica al análisis de los circuitos de aplicación práctica perfilados en 3.4, ya que las restricciones topológicas que los definen implican ciertas simplificaciones que van a facilitar el proceso. Para ello, se va a considerar el planteamiento de las ecuaciones en una amplia clase de circuitos SC, que abarca a la casi totalidad de los que actualmente se encuentran en las aplicaciones y se caracterizan por cumplir los siguientes requisitos:

*a*) Todos los AO llevan el terminal no inversor conectado al nodo de referencia. Es decir, no se consideran AO en modo diferencial.

*b*) Todos los nodos en ambas fases deben ir conectados a terminales de baja impedancia respecto al nodo de referencia, entendiendo por tales: el terminal del generador de entrada no conectado a masa, los terminales de salida de los AO y las masas reales o virtuales (entradas inversoras de los AO). Por tanto, se excluyen los nodos formados únicamente por la confluencia de condensadores.

La primera condición corresponde a una de las reglas de diseño enumeradas en 3.4.1, que derivaban de ciertos aspectos prácticos de los procesos en tecnología MOS. La segunda condición, tal como se ha visto en 3.4.4, es una condición necesaria, aunque no suficiente, para que el comportamiento del circuito no esté afectado por las capacidades parásitas introducidas por los transistores MOS de los conmutadores.

Una consecuencia directa de las restricciones que caracterizan a este tipo de circuitos es que el número de ecuaciones en cada fase es el mismo y coincide con el número de AO, que se va a denominar $n$. Estas ecuaciones serán, además, las ecuaciones de equilibrio de carga formuladas en las entradas inversoras de los AO (puntos de suma).

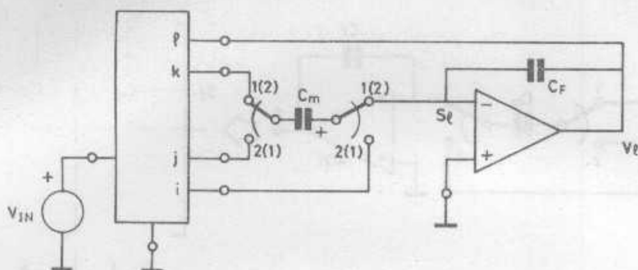



Figura 3.52 Conexión general de un condensador conmutado.

En la figura 3.52 se representa la conexión más general de un condensador conmutado en el tipo de circuitos que se están considerando ahora, por lo que los nodos $i$, $j$ y $k$ se suponen conectados a terminales de baja impedancia.

La presencia del condensador $C_F$ se debe a la necesidad de estabilizar el AO con un lazo continuo. Este aspecto se describió ya en 3.4.1. Desde el punto de vista del planteamiento de las ecuaciones, su tratamiento será análogo al del resto de condensadores, con la particularidad obvia de que permanece conectado entre los mismos nodos durante las dos fases. Por ello, puede llegarse a resultados coherentes en hipotéticos circuitos que no lo incluyen.

Respecto a la independencia del comportamiento de los circuitos de las capacidades parásitas, aspecto este de gran importancia, que se ha tratado ya detalladamente en 3.4, el nodo $i$ debería ser necesariamente de tensión cero para asegurar esta característica. Sin embargo, en ciertas aplicaciones de interés se utilizan algunas conexiones de condensadores donde $V_i$ es distinta de cero porque, en las estructuras donde se emplean, la influencia de las capacidades parásitas asociadas se traduce en un factor de amplificación constante que, por su carácter no selectivo, resulta poco relevante. Por ello es preferible incluir esta posibilidad para no restringir excesivamente el método de análisis.

Las dos ecuaciones asociadas a cada $AO_l$ que habrá que plantear en general, una en cada fase, e interpretar como ecuaciones de equilibrio de carga, tal como se apuntaba en 3.6.2, consistirán en expresar que la suma total de carga que ha entrado o salido en el nodo $S_l$ durante la fase correpondiente debe ser cero. Si se considera el sentido entrante como positivo, atendiendo al carácter de punto de suma que suele asignarse al nodo $S_l$, la carga que entra a este nodo por el condensador $C_m$ durante la fase 1 vendrá dada por

$$\Delta Q_{m1} = C_m v_k(nT + T/2^-) + C_m[v_i(nT^-) - v_j(nT^-)] \qquad (3.106)$$

y la ecuación completa consistirá en igualar a cero la suma de las cargas introducidas por el conjunto de condensadores, que como $C_m$, están conectados a $S_l$ en la misma fase.

En la figura 3.53*a*) se ha representado la contribución de $C_m$ en la construcción de la matriz $C$ de acuerdo con (3.106). Razonando de forma análoga, se llega a la contribución que se obtendría caso de que la conexión del

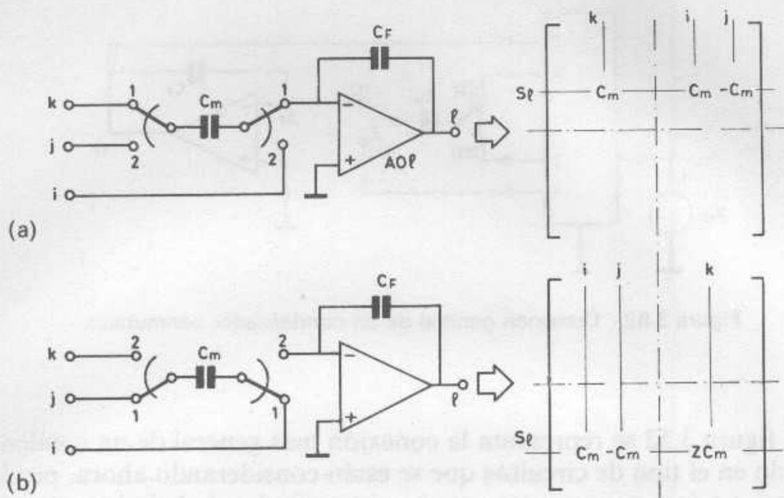



Figura 3.53 Contribución de $C_m$ en la matriz $C$. *a*) Conexión a $S_1$ en la fase 1. *b*) Conexión en la fase 2.

condensador a $S_l$ se produjera durante la fase 2. Esta posibilidad se representa en la figura 3.53*b*).

De esta figura se deduce la línea a seguir para la construcción de la matriz $\underset{\sim}{C}$, considerando por separado la contribución de cada condensador y que puede resumirse en las siguientes reglas:

1. La entrada inversora $S_l$, a la que queda conectado un condensador, define la fila de $[\underset{\sim}{C}_{11} \mid \underset{\sim}{C}_{12}]$ o $[\underset{\sim}{C}_{21} \mid \underset{\sim}{C}_{22}]$, según que la conexión se realice durante la fase 1 o 2 respectivamente, donde interviene este condensador.
2. La contribución del condensador consiste en los siguientes términos: uno de valor $C_m$ situado en la columna $k$ de $\underset{\sim}{C}_{11}$ o $\underset{\sim}{C}_{22}$, según la fase, asociada al nodo al que está conectado el otro terminal del condensador durante la fase en cuestión. Otros dos términos, de valores $C_m$ y $-C_m$ respectivamente y en $\underset{\sim}{C}_{12}$ o $\underset{\sim}{C}_{21}$ según la fase, situados sobre las columnas $j$ e $i$, definidas por los nodos a los que el condensador se conectó durante la fase anterior. El término positivo corresponde a la columna $i$, asociada al nodo donde se conectó el mismo terminal del condensador que se enlaza ahora al punto $S_l$.

En los circuitos insensibles a las capacidades parásitas, el último término mencionado sobre la columna $i$, aludiendo a la misma figura, no aparecerá, ya que la tensión en el nodo correspondiente ha de ser necesariamente cero. Como consecuencia, se deduce que, en estos circuitos, todos los términos de $\underset{\sim}{C}_{12}$ y $\underset{\sim}{C}_{21}$ tienen el mismo signo. Con el sentido de referencia tomado en el planteamiento de ecuaciones éste será negativo. Por el contrario, tal como se ha visto, los términos de $\underset{\sim}{C}_{11}$ y $\underset{\sim}{C}_{22}$ son todos positivos.

Por otra parte, y como detalle adicional, puede observarse que los condensadores no conmutados, en los que se incluyen los condensadores de

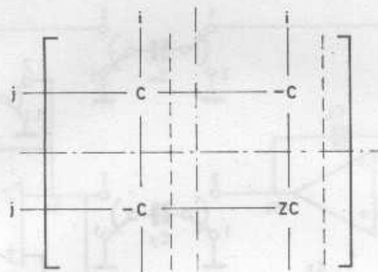



Figura 3.54 Contribución de un condensador no conmutado.

realimentación de los AO, producen contribuciones como la ilustrada en la figura 3.54, que corresponde a un condensador C conectado entre la salida del $AO_i$ y la entrada inversora del $AO_j$. Esta propiedad, que es obvia, agiliza la obtención de la matriz $\underset{\sim}{C}$ en el análisis manual.

Tal como puede apreciarse, el proceso de construcción del sistema de ecuaciones, siguiendo las reglas anteriores, válidas para el tipo de circuitos denominados de interés práctico, resulta sensiblemente más sencillo que en el caso general, fundamentalmente en lo relativo a la obtención de las submatrices $\underset{\sim}{C}_{11}$ y $\underset{\sim}{C}_{22}$.

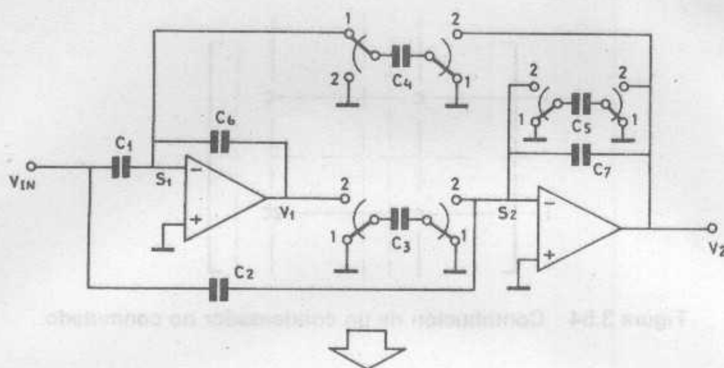
Por último, puede advertirse que la matriz resultante queda cambiada de signo con respecto a la que se obtendría aplicando el método general descrito en 3.62, ya que en este caso se han formulado las ecuaciones de equilibrio de carga tomando como positivo el sentido entrante a los nodos $S_i$, contrariamente a como normalmente se hace en el análisis nodal.

Con el programa de análisis frecuencial ARIADNA que se incluye en este texto, pueden analizarse circuitos SC que se ajusten a las restricciones topológicas 1 y 2 antes descritas, con un máximo de 50 condensadores y 20 AO.

En la figura 3.55*a*) se representa el circuito SC de una sección bicuadrática y en *b*) la correspondiente matriz $\underset{\sim}{C}$ obtenida por aplicación de las reglas desarrolladas en este punto.

Este circuito presenta una característica que es común a una gran parte de las realizaciones a las que se llega por aplicación de las técnicas de síntesis actuales: todos los condensadores conmutados se conectan de manera que cada uno de sus terminales se pone a masa durante una de las fases. Se trata, por tanto, de un caso particular dentro de las conexiones en los circuitos insensibles a las capacidades parásitas. Las dos posibilidades que hay para cada fase se representan en la figura 3.56. Estas conexiones pueden denominarse básicas en orden a que representan de forma independiente los dos mecanismos elementales que se producen en los circuitos SC: las transferencias de carga que dependen de tensiones en la misma fase, figura 3.56*a*), y las transferencias dependientes de las tensiones en la fase anterior, figura 3.56*b*).

La consecuencia obvia de estos tipos de conexión es que cada condensador $C_j$, así conectado, produce solamente un término en la construcción de la matriz




| | $V_1$ | $V_2$ | $V_{IN}$ | $V_1$ | $V_2$ | $V_{IN}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | $C_6$ | 0 | $C_1$ | $-C_6$ | $-C_4$ | $-C_1$ |
| $S_2$ | 0 | $C_7$ | $C_2$ | 0 | $-C_7$ | $-C_2$ |
| $S_1$ | $-C_6$ | 0 | $-C_1$ | $Z\,C_6$ | 0 | $Z\,C_1$ |
| $S_2$ | 0 | $-C_7$ | $-C_2$ | $Z\,C_3$ | $Z\,(C_5+C_7)$ | $Z\,C_2$ |

Figura 3.55 Circuito SC y su matriz *C*.

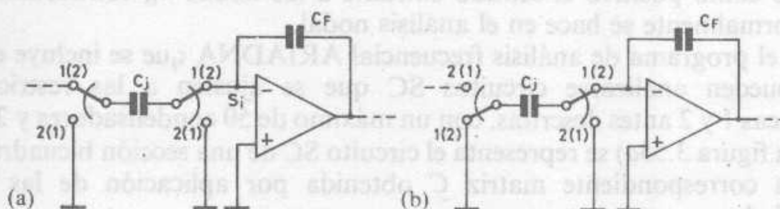



Figura 3.56 Conexiones básicas de condensadores conmutados.

del sistema de ecuaciones: los conectados de acuerdo con *a)* sobre $\tilde{C}_{11}$ o $\tilde{C}_{22}$ y los que responden a la forma *b)* en $\tilde{C}_{12}$ o $\tilde{C}_{22}$, en ambos casos según la fase.

### 3.6.6 Funciones de transferencia

Una vez descrito el procedimiento a seguir para la obtención de la matriz *C*, se trata ahora sobre algunos aspectos relativos a la resolución del sistema de ecuaciones (3.102), que relacionaba entre sí las secuencias definidas sobre las tensiones nodales del circuito y la tensión de entrada.

Este sistema puede reescribirse de la forma siguiente

$$\underset{\sim}{C}^r(z)\underline{V}^r(z)=\underline{G}_1 V_{IN}^1(z)+\underline{G}_2(z)V_{IN}^2(z) \qquad (3.107)$$

donde $G_1$ y $G_2(z)$ son los vectores columna formados por los términos que afectan a las secuencias de entrada, cambiados de signo, que se han extraído de $\underset{\sim}{C}$. La dependencia de $\underline{G}_2$ de la variable $z$ se debe a la estructura de $\underset{\sim}{C}$.

$\underset{\sim}{C}^r$ es la matriz cuadrada que resulta de extraer las mencionadas columnas. $\underline{V}^r(z)$ es el vector de las secuencias definidas sobre las tensiones nodales excluida la tensión de entrada.

Considerando ahora cualquiera de las tensiones nodales $v_K(t)$ como señal de salida, el sistema (3.107) puede resolverse para las correspondientes secuencias $V_K^1$ y $V_K^2$, obteniéndose

$$\begin{aligned} V_K^1(z)&=H_{11}(z)V_{IN}^1(z)+H_{12}(z)V_{IN}^2(z) \\ V_K^2(z)&=H_{21}(z)V_{IN}^1(z)+H_{22}(z)V_{IN}^2(z) \end{aligned} \qquad (3.108)$$

donde

$$H_{ij}(z)=\frac{\Delta_{ij}^K}{|\underset{\sim}{C}^r|} \qquad (3.109)$$

siendo $\Delta_{ij}^K$ el determinante de la matriz del sistema que se obtiene sustituyendo en $\underset{\sim}{C}^r$ la columna correspondiente al nodo $k$ de la primera o segunda fase según $i$, por $\underline{G}_1$ o $\underline{G}_2(z)$ según $j$.

Las funciones $H_{ij}(z)$ se denominan funciones de transferencia parcial y son la base para la caracterización de los circuitos SC como sistemas discretos y la obtención de su respuesta frecuencial.

De la expresión (3.109) se deduce que las cuatro funciones de transferencia parcial, que son funciones racionales de la variable $z$, tienen todas el mismo denominador salvo posibles cancelaciones.

Además, para los circuitos que cumplen las restricciones de 3.6.5, en los que $n_1=n_2=n$, siendo $n$ el número de AO, el grado máximo de cualquiera de los polinomios de numerador o denominador coincide con $n$, ya que, en cualquiera de los determinantes que puedan figurar en (3.109), la variable $z$ puede aparecer como mucho en las $n$ últimas columnas sobre las $n$ últimas filas. En el caso general puede demostrarse que el orden aludido es igual al menor de los números de variables nodales en ambas fases, $n_1$ y $n_2$, respectivamente.

Como puede observarse, la existencia de estas cuatro funciones es la consecuencia lógica de suponer que, en general, en los circuitos SC se extrae información de la señal de entrada durante las dos fases. En el circuito de la figura 3.55 se ve claramente que las dos secuencias definidas sobre la tensión de entrada van a incidir sobre cualquiera de las secuencias que se considerasen como salida a través de los condensadores no conmutados $C_1$ y $C_2$.

En los circuitos SC aplicados en filtrado de señales interesa su caracteriza-

ción mediante una función de transferencia que lo asimile a un sistema discreto. Para ello, es preferible suponer la señal de entrada constante a tramos, en principio de duración $T/2$, con lo que la tensión de salida será del mismo tipo. De esta manera, la referencia al tiempo de las secuencias que intervienen, puede desplazarse al comienzo de cada fase manteniendo (3.108) su validez. En la figura 3.57 se refleja esta situación así como las relaciones que establecen las funciones $H_{ij}(z)$ entre las transformadas de las secuencias. El factor $z$ que multiplica a $H_{21}(z)$ se debe a la definición de las secuencias y a la necesidad obvia, en los sistemas en el dominio del tiempo, de que la respuesta no sea anterior a la excitación (sistemas causales).

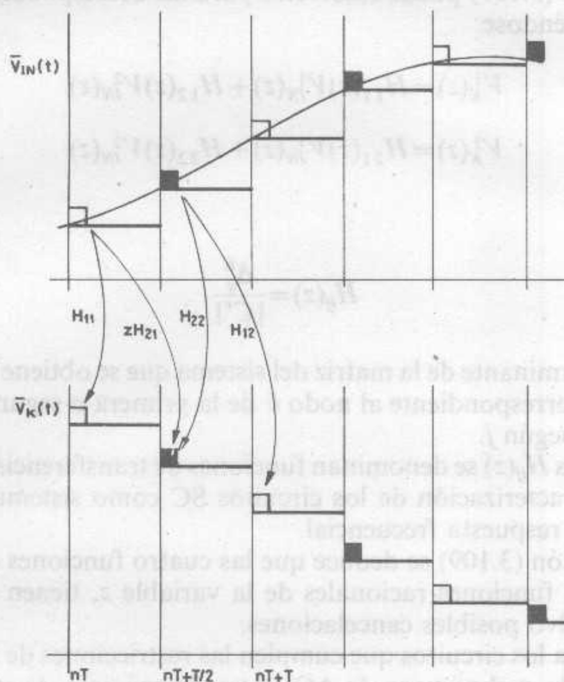



Figura 3.57 Señales de entrada y de salida.

De esta figura se deduce, además, la línea a seguir para obtener sistemas discretos que respondan básicamente a cada una de las funciones que en ella aparecen.

En efecto, la señal de entrada puede considerarse formada por dos componentes distintas, $v_{IN}^1(t)$ y $v_{IN}^2(t)$, tal como se definen en la figura 3.58, que corresponden a la retención en $T/2$ de las secuencias $v_{IN}^1(n)$ y $v_{IN}^2(n)$ respectivamente.

Si la señal de entrada consta sólo de la primera componente, que se puede

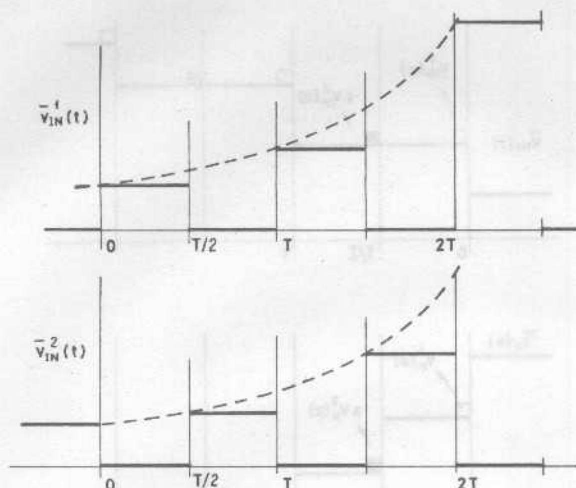



Figura 3.58 Componentes de la señal $v_{IN}(t)$.

obtener mediante un módulo S/H a partir de una señal continua, se anularán en (3.108) las secuencias con superíndice 2, y en la figura 3.57 desaparecerán las flechas correspondientes a $H_{22}$ y $H_{12}$. En esta situación, según se considere la componente $v_k^1(t)$ o $v_k^2(t)$ de la señal de salida, definidas de igual manera, se obtendrán las funciones de transferencia $H_{11}(Z)$ y $zH_{21}(Z)$ respectivamente.

En realidad, en la segunda, de cara a la respuesta frecuencial, hay que incorporar un retardo de $T/2$, ya que transcurre este intervalo entre cada muestra de la señal de entrada y la correspondiente a la de salida. Este retardo equivale en el dominio de la frecuencia al factor $e^{-j\omega T/2}$ por lo que, en el dominio de la variable $z$, suele representarse por $z^{-1/2}$.

Por el contrario, si en la señal de entrada sólo está la segunda componente, podrán obtenerse como funciones de transferencia: $H_{12}(z)$, afectada por un retardo de $T/2$, o $H_{22}(z)$, según se considere la primera o segunda componente de $v_k(t)$, respectivamente. En la práctica, la selección de una u otra función se realiza con un módulo S/H adecuado de retención $T$ que muestree la señal de salida durante la fase que corresponda.

En los circuitos SC en los que únicamente se conectan condensadores al generador de entrada durante una de las fases sólo se dispondrá de dos funciones distintas.

La conexión de condensadores al generador de entrada durante las dos fases ofrece mayor versatilidad en el diseño. Sin embargo, si quiere aprovecharse esta posibilidad, las dos muestras adquiridas en cada intervalo de duración $T$ deben ser iguales. De lo contrario, se estaría produciendo un muestreo efectivo de frecuencia doble, a la que no corresponden las funciones $H_{ij}(z)$. Por esta razón, en las aplicaciones es más frecuente utilizar señales de entrada constantes a tramos de duración $T$.

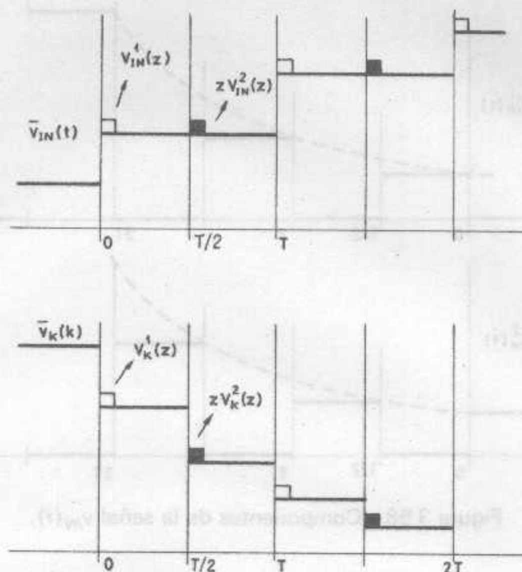



Figura 3.59 Entrada constante a tramos de duración *T*.

Se trata ahora de obtener las funciones de transferencia en esta situación. Para ello, se supone un circuito con una tensión $v_{IN}(t)$, como la representada en la figura 3.59. Por lo que se tendrá

$$V^1_{IN}(z)=zV^2_{IN}(z) \tag{3.110}$$

La tensión de salida, en general, será, sin embargo, constante a tramos de duración *T*/2.

Sustituyendo (3.110) en (3.108) se llega a

$$\begin{aligned} V^1_K(z)&=[H_{11}(z)+z^{-1}H_{12}(z)]V^1_{IN}(z) \\ V^2_K(z)&=[H_{21}(z)+z^{-1}H_{22}(z)]V^1_{IN}(z) \end{aligned} \tag{3.111}$$

Por lo que, según se muestree la salida durante las fases 1 o 2, se obtendrán respectivamente las funciones

$$H_1(z)=\frac{V^1_K(z)}{V^1_{IN}(z)}=H_{11}(z)+z^{-1}H_{12}(z) \tag{3.112}$$

$$H_2(z)=\frac{zV^2_K(z)}{V^1_{IN}(z)}=zH_{21}(z)+H_{22}(z) \tag{3.113}$$

En cierta clase de circuitos, a la que corresponde la sección bicuadrática

desarrollada en el punto 3.5, sólo se conectan condensadores conmutados a las entradas de los AO durante la fase 1. Por este motivo, como se describió allí, la señal de salida es también constante en intervalos de $T$ segundos, lo que implica que $H_1(z)$ y $H_2(z)$ son iguales, por lo que no es necesario el módulo S/H de salida.

Tal como se apuntaba, la caracterización de los circuitos SC como sistemas discretos, mediante funciones de transferencia en la variable $z$, permite su aplicación, por ejemplo, en el filtrado de señales analógicas, según el diagrama general de la figura 3.18 en el punto 3.2.6.

En el capítulo 7 se analizan dos ejemplos en los que se obtiene la expresión de las cuatro funciones $H_{ij}(z)$ y la función de transferencia (3.112).

## Capítulo 4

# Métodos numéricos para la realización de un programa de análisis de circuitos

## 4.1 INTRODUCCION

En los dos primeros capítulos de este texto se han tratado temas fundamentales de la Teoría de Circuitos, con especial atención a los distintos métodos para el planteamiento de las ecuaciones de circuitos analógicos invariantes, habiéndose descrito tanto los más adecuados al análisis manual como aquellos especialmente orientados al automático. En el tercer capítulo se han presentado los circuitos de condensadores conmutados (Switched-Capacitor, SC) que se utilizan, entre otras aplicaciones, en la realización de filtros monolíticos para el procesado analógico de señales.

Se aborda a partir de aquí la simulación en ordenador, tema de gran amplitud que abarca desde aspectos propios de la Teoría de Circuitos, entre los que cabe citar el de la modelación de dispositivos electrónicos no lineales, hasta otros que pertenecen al ámbito del Análisis Numérico, como pueden ser los métodos de solución de sistemas de ecuaciones algebraicas o diferenciales, lineales o no lineales; la convergencia de los distintos algoritmos desarrollados para cada caso; el acotamiento de los errores que se producen en su aplicación y el tratamiento de las matrices dispersas.

La diversidad de los temas y las dificultades que presentan desbordan ampliamente los objetivos de este texto, limitándose su contenido a presentar los fundamentos y métodos numéricos para el desarrollo de un programa de simulación de circuitos de complejidad media, analógicos invariantes y de condensadores conmutados.

Para ello, se plantea en primer lugar el problema de la formulación automática del sistema de ecuaciones. En el caso de circuitos analógicos e invariantes los métodos mas apropiados son el Nodal Modificado y el de los dos grafos, mientras que para los de condensadores conmutados se utilizará el Nodal por equilibrio de carga. Como se ha visto en los capítulos anteriores, en

la aplicación de cada uno de estos métodos se obtiene un sistema de ecuaciones en el que los elementos de su matriz son de primer grado en $s$ o en $z$, aspecto que será de interés tanto en la determinación de las funciones de red en $s$ o de transferencia en $z$, como en el cálculo de la respuesta temporal de circuitos analógicos.

## 4.2 RESPUESTA FRECUENCIAL DE CIRCUITOS

Para la determinación de la respuesta frecuencial de circuitos analógicos invariantes, con una sola excitación o entrada $x(t)$ y una variable $y(t)$ definida como respuesta o salida, existen dos vías. Una de ellas se basa en el cálculo de $Y(j\omega)$ para cada valor de la frecuencia $\omega$, resolviendo repetidamente el sistema de ecuaciones del circuito después de sustituir en su matriz la variable $s$ por $j\omega$ e igualar la excitación a la unidad. La respuesta $Y(j\omega)$, que coincide con $H(j\omega)$, es un número complejo cuyos valores del módulo y del argumento caracterizan la respuesta frecuencial.

Un método alternativo consiste en la determinación previa de los coeficientes $b_i$ y $a_i$ de los polinomios numerador $N(s)$ y denominador $D(s)$ de la función de red $H(s)$, definida como el cociente de las transformadas de Laplace de la respuesta a condiciones iniciales nulas $Y(s)$ y de la excitación $X(s)$, según la expresión

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} \tag{4.1}$$

donde $m$ y $n$ son, respectivamente, los grados de los polinomios $N(s)$ y $D(s)$.

La posterior sustitución en $H(s)$ de la variable $s$ por $j\omega$, para cada valor de la frecuencia, da lugar a un número complejo $H(j\omega)$ cuyos valores del módulo $|H(j\omega)|$ y del argumento $\sphericalangle H(j\omega)$ determinan la respuesta frecuencial y coinciden con los obtenidos en el método anterior.

El argumento de $H(j\omega)$ recibe el nombre de desfase, mientras que a su módulo se le denomina amplificación siempre que las variables de salida y de entrada sean homogéneas. En los demás casos se le asigna el nombre de módulo de la impedancia o de la admitancia.

El cálculo de los coeficientes $b_i$ y $a_i$ puede hacerse por interpolación de $(m+1)$ y $(n+1)$ valores de los polinomios numerador $N(s)$ y denominador $D(s)$, respectivamente. Su determinación exige resolver el sistema de ecuaciones un número de veces superior en una unidad al mayor de los enteros $m$ y $n$ que, a su vez, es como máximo igual al número de condensadores, inductores y amplificadores operacionales modelados a través de una función de transferencia con un polo real, presentes en el circuito.

El reducido número de veces que hay que resolver el sistema de ecuaciones

determina que un programa basado en el cálculo previo de la función de red sea más eficaz, en cuanto al tiempo de ejecución, que cualquiera de los que se fundamentan en la repetida solución del sistema para cada valor de la frecuencia.

Un razonamiento similar aconseja en los circuitos de condensadores conmutados determinar, previamente a la respuesta frecuencial, las funciones de transferencia parcial, $H_{jk}(z)$, que para el caso de circuitos de dos fases se definen por las expresiones

$$\begin{aligned} V_i^1(z) &= H_{11}(z)V_{IN}^1(z) + H_{12}(z)V_{IN}^2(z) \\ V_i^2(z) &= H_{21}(z)V_{IN}^1(z) + H_{22}(z)V_{IN}^2(z) \end{aligned} \tag{4.2}$$

donde $V_i^1(z)$, $V_i^2(z)$, $V_{IN}^1(z)$, $V_{IN}^2(z)$, son las transformadas $z$ de las secuencias definidas por los valores de las señales de salida y entrada en cada fase en los instantes inmediatamente anteriores a las conmutaciones. Dichas funciones de transferencia parcial pueden obtenerse según

$$\begin{aligned} H_{11}(z) &= \left.\frac{V_i^1(z)}{V_{IN}^1(z)}\right| V_{IN}^2(z)=0 \qquad & H_{12}(z) &= \left.\frac{V_i^1(z)}{V_{IN}^2(z)}\right| V_{IN}^1(z)=0 \\ H_{21}(z) &= \left.\frac{V_i^2(z)}{V_{IN}^1(z)}\right| V_{IN}^2(z)=0 \qquad & H_{22}(z) &= \left.\frac{V_i^2(z)}{V_{IN}^2(z)}\right| V_{IN}^1(z)=0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

y tienen la forma de cocientes de polinomios en $z$. En cuanto a la función de transferencia del circuito, $H(z)$, su relación con las $H_{jk}(z)$ viene regida por distintas expresiones según el acondicionamiento de la señal de entrada en lo que respecta a su posible muestreo y mantenimiento y del instante en el que se muestree la señal de salida. La amplificación y el desfase son iguales, respectivamente, al módulo y argumento del numero complejo $H(e^{j\omega T})$, resultado de sustituir en $H(z)$ la variable $z$ por

$$e^{j\omega T} = e^{j2\pi\omega/\omega_s} \tag{4.4}$$

donde $\omega$ es la frecuencia de la señal de entrada y $\omega_s$ y $T$ la frecuencia y el período de conmutación, respectivamente.

Cabe destacar que en los circuitos SC de utilidad práctica, cuyos nodos son únicamente el de entrada del circuito y los de entrada y salida de los amplificadores operacionales, el orden, definido como el mayor de los grados de los polinomios numeradores y denominadores de las funciones de transferencia, coincide con el número de estos dispositivos, siempre que para ellos se utilice el modelo ideal. En consecuencia, el número de veces que hay que resolver el sistema de ecuaciones es igual al de amplificadores operacionales aumentado en una unidad.

Atendiendo a los criterios expuestos, un programa para la determinación de

la respuesta frecuencial de circuitos analógicos o de condensadores conmutados, a partir de las funciones de red o de transferencia, debe incluir los siguientes pasos:

1. Formulación automática del sistema de ecuaciones a partir de la descripción del circuito, aplicando el Método Nodal Modificado o el de los dos grafos en el caso de los analógicos invariantes y el Nodal por equilibrio de carga en el de condensadores conmutados.
2. Elección de un conjunto de valores de las variables $s$ o $z$ cuyo número sea superior en una unidad al orden del circuito, que para los analógicos invariantes es, como máximo, igual al de condensadores, inductores y amplificadores operacionales modelados con una función de transferencia en lazo abierto de primer orden, mientras que en el caso de los circuitos de condensadores conmutados con las restricciones antes citadas, coincide con el número de amplificadores operacionales. Esta elección debe hacerse con el criterio de minimizar los errores de redondeo y de aumentar la eficacia en la solución del sistema.
3. En el caso de circuitos analógicos invariantes, solución del sistema de ecuaciones para cada valor $s_i$ de la variable $s$ y determinación de los valores de $N(s_i)$ y $D(s_i)$ correspondientes a los polinomios numerador y denominador, respectivamente, de la función de red. Para ello se sustituye en la matriz del sistema $\underset{\sim}{T}(s)$ la variable $s$ por $s_i$, y se calcula su determinante $|\underset{\sim}{T}(s_i)|$ que coincide con el valor del polinomio del denominador $D(s)$ según la expresión

$$D(s_i)=|\underset{\sim}{T}(s_i)| \tag{4.5}$$

Posteriormente, se iguala la excitación a la unidad y se resuelve el sistema para la variable $Y(s)$. Al cumplirse que

$$Y(s_i)=H(s_i)=\frac{N(s_i)}{D(s_i)} \tag{4.6}$$

el valor de $N(s_i)$ puede determinarse según la expresión

$$N(s_i)=Y(s_i)\,D(s_i) \tag{4.7}$$

en la que los valores de la variable de salida y del denominador de la función de red se han obtenido anteriormente.

Un procedimiento similar se sigue en el caso de los circuitos de condensadores conmutados para la determinación de $N_{jk}(z_i)$ y $D(z_i)$ correspondientes a las funciones de transferencia parcial. Para todas ellas el valor de $D(z_i)$ es el mismo al coincidir con el determinante de la matriz del sistema, mientras que $N_{jk}(z_i)$ se obtiene a partir de la señal de salida en la fase $j$, después de igualar a la unidad la señal de excitación en la fase $k$ y a cero en la $j$.
4. Determinación de la función de red o de transferencia parcial por interpolación.

Los $(n+1)$ coeficientes de un polinomio de grado $n$ pueden obtenerse por interpolación de los valores que toma para $(n+1)$ valores de su variable. En consecuencia, interpolando los resultados obtenidos en el paso anterior, se podrán determinar los coeficientes de los polinomios numerador y denominador de la función de red, $H(s)$, o de la función de transferencia parcial, $H_{jk}(z)$. Un programa que obtiene dichas funciones expresadas en $s$ o $z$ recibe el nombre de semisimbólico, en contraste con los calificados de simbólicos, que las determinan en función de estas variables y de los símbolos asignados a los elementos del circuito, proporcionando una información de igual calidad que la que se puede obtener de un análisis manual, pero con la ventaja de poder abordar circuitos de mayor complejidad.

5. Cálculo de los parámetros de la respuesta frecuencial.

   Una vez obtenida la expresión de la función de red $H(s)$ de un circuito analógico invariante, se trata de determinar, para una frecuencia determinada $\omega_0$, el número complejo $H(j\omega_0)$ cuyos valores del módulo y del argumento caracterizan la respuesta frecuencial para $\omega=\omega_0$. Repitiendo el proceso para distintos valores de la variable $\omega$, pueden obtenerse las curvas de amplificación, ganancia y desfase del circuito.

   En el caso de circuitos de condensadores conmutados, la función de transferencia $H(z)$ puede determinarse a partir de las $H_{jk}(z)$ según las expresiones deducidas en el capítulo anterior. La respuesta frecuencial queda caracterizada por $H(e^{j\omega_0 T})$, resultado de sustituir en $H(z)$ la variable $z$ por

$$z=e^{j\omega_0 T}=e^{j2\pi\omega_0/\omega_s}=e^{j\theta}=\cos\theta+j\ \mathrm{sen}\ \theta \tag{4.8}$$

   donde $T$ y $\omega_s$ son, respectivamente, el período y la frecuencia de la conmutación, $\omega_0$ la frecuencia de la excitación y $\theta$ corresponde al valor relativo de esta variable expresada como un ángulo. Por otra parte, la función $H(e^{j\theta})$ es periódica, siendo su período igual a $2\pi$, y los valores de $H(e^{j\theta})$ y $H(e^{-j\theta})$ son complejos conjugados, por lo que la respuesta frecuencial queda completamente caracterizada por sus valores en el intervalo $[0, \pi]$, o lo que es equivalente en el $[0, \omega_s/2]$.

Los problemas mas importantes que se plantean al elaborar un programa según los pasos que se acaban de describir son el cálculo del determinante de una matriz, la solución de un sistema de ecuaciones lineales y algebraicas y la determinación de los coeficientes de un polinomio por interpolación. Su tratamiento configura el contenido de los siguientes apartados.

## 4.3 METODOS DE SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES ALGEBRAICAS LINEALES

Un programa para la determinación de la respuesta temporal o frecuencial de circuitos incluye necesariamente la solución de sistemas de ecuaciones

algebraicas y lineales. De los distintos métodos que para ello se han desarrollado se presentan aquí los mas adecuados para su implementación en ordenador.

Un sistema de ecuaciones lineales y algebraicas puede expresarse como

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

cuya forma matricial es

$$\underset{\sim}{A}\underline{x} = \underline{b} \tag{4.10}$$

donde $\underset{\sim}{A}$ es una matriz cuadrada de orden $n$, cuyos elementos son números reales o complejos, $\underline{x}$ es el vector de las $n$ incógnitas y $\underline{b}$ el de los $n$ términos independientes.

Si la matriz $\underset{\sim}{A}$ es no singular, la solución del sistema es única y viene dada por la expresión

$$\underline{x} = \underset{\sim}{A}^{-1}\underline{b} \tag{4.11}$$

donde $\underset{\sim}{A}^{-1}$ es la matriz inversa de $\underset{\sim}{A}$.

Más eficaz que la determinación de la matriz inversa es el método basado en la regla de Cramer, según la cual el valor de una cualquiera de las incógnitas puede obtenerse como cociente de dos determinantes a través de la expresión

$$x_k = \frac{|\underset{\sim}{A}_k|}{|\underset{\sim}{A}|} \tag{4.12}$$

donde $\underset{\sim}{A}_k$ es la matriz resultante de sustituir en $\underset{\sim}{A}$ la columna de coeficientes de $x_k$ por el vector $\underline{b}$ de términos independientes.

De todas formas los métodos basados en la determinación de la matriz inversa y en la aplicación de la regla de Cramer no se utilizan en el cálculo automático debido a la complejidad de los algoritmos a que dan lugar, recurriéndose a métodos numéricos que pueden clasificarse en directos e indirectos. En los primeros se llega a la solución después de un número prefijado de pasos, mientras que en los del segundo tipo se obtiene una secuencia infinita de valores que puede converger a la solución. Precisamente, la posibilidad de que para ciertos sistemas de ecuaciones la convergencia no se produzca determina que los métodos iterativos se utilicen únicamente en casos muy especiales, siendo mucho más extendido el uso de los directos. De entre ellos destaca el de eliminación de Gauss y el de la descomposición triangular o descomposición LU, que, aunque no son óptimos en cuanto al número de operaciones que requieren, son los mas eficientes y los que mejor se adaptan al tratamiento de las matrices dispersas.

### 4.3.1 Método de eliminación de Gauss

En un sistema de ecuaciones la solución permanece invariante si una de ellas se sustituye por su suma con otra del sistema, previamente multiplicada por una constante.

El método de eliminación de Gauss se basa en la aplicación repetida de esta propiedad hasta conseguir que un sistema de la forma

$$\underset{\sim}{A}\underline{x}=\underline{b} \tag{4.13}$$

se transforme en otro, que teniendo idéntica solución, responda a la expresión general

$$\underset{\sim}{U}\underline{x}=\underline{b}' \tag{4.14}$$

donde la matriz $\underset{\sim}{U}$ es cuadrada, del mismo orden que $\underset{\sim}{A}$ y triangular superior, con

$$\begin{aligned} u_{ij}&=1 \qquad i=j \\ u_{ij}&=0 \qquad i>j \end{aligned} \tag{4.15}$$

El sistema de ecuaciones cuya forma general se expresa en (4.14) puede desarrollarse según

$$\begin{aligned} x_1+a_{12}^1x_2+a_{13}^1x_3+\ldots+a_{1n}^1x_n&=b_1^1 \\ x_2+a_{23}^2x_3+\ldots+a_{2n}^2x_n&=b_2^2 \\ x_3+\ldots+a_{3n}^3x_n&=b_3^3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \\ x_n&=b_n^n \end{aligned} \tag{4.16}$$

expresión en la que los superíndices indican el número de transformaciones efectuadas en cada una de las ecuaciones, según el algoritmo que se describirá más adelante.

La solución de un sistema de la forma expresada en (4.16) puede obtenerse por un proceso iterativo en el que el valor de las variables ya determinadas se utiliza en el cálculo de las anteriores, razón por la que se denomina de sustitución regresiva o «back substitution», y que puede expresarse por

$$\begin{aligned} x_n&=b_n^n \\ x_{n-1}&=b_{n-1}^{n-1}-a_{n-1\,n}^{n-1}\,x_n \\ x_{n-2}&=b_{n-2}^{n-2}-a_{n-2\,n-1}^{n-2}\,x_{n-1}-a_{n-2\,n}^{n-2}\,x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1&=b_1^1-a_{12}^1\,x_2-a_{13}^1\,x_3-\ldots-a_{1n}^1\,x_n \end{aligned} \tag{4.17}$$

La forma general de este proceso de sustitución es

$$x_n = b_n^n$$
$$x_i = b_i^i - \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}^i \; x_k \; ; \quad i=(n-1),\ldots,1 \tag{4.18}$$

que constituye un algoritmo fácilmente implementable en ordenador.

Con lo anterior el problema de resolver un sistema de ecuaciones lineales y algebraicas se reduce a su transformación en otro de idéntica solución y que responda a la forma general expresada en (4.14) y (4.16). Para ello, se aplica un algoritmo cuyo primer paso consiste en igualar a la unidad el coeficiente de $x_1$ en la primera ecuación y eliminar esta variable del sistema formado por las restantes. Según esto, la primera ecuación se sustituye por el resultado de dividir sus coeficientes por $a_{11}$, término que recibe el nombre de pivote, resultando

$$\begin{aligned} a_{11}^1 &= 1 \\ a_{1j}^1 &= a_{1j}/a_{11} \qquad j=2,\ldots,n \\ b_1^1 &= b_1/a_{11} \end{aligned} \tag{4.19}$$

y cada una de las restantes por su diferencia con la transformada de la primera multiplicada por su coeficiente de $x_1$, obteniéndose

$$\begin{aligned} a_{ij}^1 &= a_{ij} - a_{i1}\, a_{1j}^1 \quad ; \quad i=2,\ldots,n \quad ; \quad j=1,\ldots,n \\ b_i^1 &= b_i - a_{i1}\, b_1^1 \quad ; \quad i=2,\ldots,n \end{aligned} \tag{4.20}$$

Con esta transformación se anulan los coeficientes de $x_1$ en todas las ecuaciones excepto en la primera, resultando el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + a_{12}^1\, x_2 + a_{13}^1\, x_3 + \ldots + a_{1n}^1\, x_n &= b_1^1 \\ a_{22}^1\, x_2 + a_{23}^1\, x_3 + \ldots + a_{2n}^1\, x_n &= b_2^1 \\ a_{32}^1\, x_2 + a_{33}^1\, x_3 + \ldots + a_{3n}^1\, x_n &= b_3^1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n2}^1\, x_2 + a_{n3}^1\, x_3 + \ldots + a_{nn}^1\, x_n &= b_n^1 \end{aligned} \tag{4.21}$$

que por el tipo de transformaciones realizadas tiene la misma solución que el inicial.

Dejando invariante la primera ecuación y procediendo de igual forma, es decir, sustituyendo la segunda por su cociente por $a_{22}^1$ y cada una de las restantes por la diferencia con este resultado multiplicado por su coeficiente de $x_2$, resulta

$$a_{22}^2 = 1$$
$$a_{2j}^2 = a_{2j}^1 / a_{22}^1 \quad ; \quad j = 3, ..., n \tag{4.22}$$
$$b_2^2 = b_2^1 / a_{22}^1$$

además de

$$a_{ij}^2 = a_{ij}^1 - a_{i2}^1 \, a_{2j}^2 \quad ; \quad i = 3, ..., n \quad ; \quad j = 2, ..., n$$
$$b_i^2 = b_i^1 - a_{i2}^1 \, b_2^2 \quad ; \quad i = 3, ..., n \tag{4.23}$$

obteniéndose el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + a_{12}^1 \, x_2 + a_{13}^1 \, x_3 + ... + a_{1n}^1 \, x_n &= b_1^1 \\ x_2 + a_{23}^2 \, x_3 + ... + a_{2n}^2 \, x_n &= b_2^2 \\ a_{33}^2 \, x_3 + ... + a_{3n}^2 \, x_n &= b_3^2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{n3}^2 \, x_3 + ... + a_{nn}^2 \, x_n &= b_n^2 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Efectuando $(n-1)$ transformaciones y dividiendo la última ecuación por $a_{nn}^{n-1}$ resulta un sistema de la forma expresada en (4.16) cuya matriz es triangular superior con los elementos de la diagonal principal iguales a la unidad, y que puede resolverse aplicando las expresiones generales (4.18).

Un paso genérico $k$ del algoritmo descrito reponde a

$$\begin{aligned} & a_{kk}^k = 1 \\ & a_{kj}^k = a_{kj}^{k-1} \; / \; a_{kk}^{k-1} \quad ; \quad j = k+1, ..., n \\ & b_k^k = b_k^{k-1} \; / \; a_{kk}^{k-1} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & a_{ij}^k = a_{ij}^{k-1} - a_{ik}^{k-1} \, a_{kj}^k \quad ; \quad i = k+1, ..., n \quad ; \quad j = k, ..., n \\ & b_i^k = b_i^{k-1} - a_{ik}^{k-1} \, b_k^k \quad ; \quad i = k+1, ..., n \end{aligned} \tag{4.25}$$

Si en uno de los pasos el pivote $a_{kk}^{k-1}$ es nulo, la división por cero puede evitarse permutando la ecuación $k$ con una cualquiera de las siguientes cuyo coeficiente de $x_k$ sea distinto de cero. En caso de que el cambio no sea posible al ser nulos dichos coeficientes, se concluye que la matriz es singular y el sistema incompatible o indeterminado. Más adelante se volverá sobre el tema de la permutación de ecuaciones que no sólo se hace para evitar los pivotes nulos sino también para aumentar la precisión de los resultados.

En el método descrito, la matriz del sistema ha sido objeto de transformaciones de tres tipos. El primero de ellos consiste en el cociente de los términos de una fila por su elemento en la diagonal principal e implica que su determinante

quede dividido por este valor, que recibe el nombre de pivote. El segundo es la sustitución de una fila por su diferencia con otra multiplicada por una constante, transformación que no afecta al valor del determinante, mientras que el tercero implica un cambio de su signo, al consistir en la permutación de dos filas. De todo ello, junto al hecho de que el determinante de la matriz triangular superior $\underset{\sim}{U}$ es igual a la unidad, puede concluirse que

$$|\underset{\sim}{A}| = (-1)^m \prod_{k=1}^{n} a_{kk}^{k-1} = (-1)^m a_{11} a_{22}^1 \dots a_{nn}^{n-1} \qquad (4.26)$$

donde $m$ es el número de permutaciones entre filas que se han efectuado en el proceso de eliminación y $a_{kk}^{k-1}$ el pivote de la transformación $k$-ésima, siendo $a_{11}^0 = a_{11}$.

En los siguientes ejemplos se ilustra la aplicación del método.

*Ejemplo 4.1* Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 6x_4 &= -2 \\ -2x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 5 \\ 2x_1 + 4x_2 + 14x_3 + 18x_4 &= -10 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

por aplicación del método de eliminación de Gauss.

El primer paso del algoritmo consiste en dividir la primera ecuación por 2 y restar de cada una de las restantes el resultado obtenido multiplicando por su coeficiente de $x_1$. En esta transformación se obtiene

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= -1 \\ x_2 + 6x_3 + 4x_4 &= 3 \\ 8x_2 + 12x_3 + 12x_4 &= -8 \\ 3x_2 - 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Siguiendo con el algoritmo, en este caso no es necesario dividir la segunda ecuación por el coeficiente de $x_2$, ya que su valor es igual a la unidad. Restando de la tercera y cuarta ecuación la segunda multiplicada por 8 y 3, respectivamente, se consigue anular sus coeficientes de $x_2$. El resultado de esta transformación es

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= -1 \\ x_2 + 6x_3 + 4x_4 &= 3 \\ -36x_3 - 20x_4 &= -32 \\ -18x_3 - 14x_4 &= -8 \end{aligned}$$

Procediendo de la misma forma, en la tercera transformación se obtiene

$$\begin{aligned} x_1-2x_2+\ x_3+3x_4&=-1\\ x_2+6x_3+4x_4&=\ \ 3\\ x_3+\frac{5}{9}x_4&=\ \ \frac{8}{9}\\ -4x_4&=\ \ 8 \end{aligned}$$

Por último, haciendo que en la cuarta ecuación el coeficiente de $x_4$, sea igual a la unidad se llega al sistema

$$\begin{aligned} x_1-2x_2+\ x_3+3x_4&=-1\\ x_2+6x_3+4x_4&=\ \ 3\\ x_3+\frac{5}{9}x_4&=\ \ \frac{8}{9}\\ x_4&=-2 \end{aligned}$$

del que pueden obtenerse los valores de las variables por aplicación de la «back substitution», resultando

$$x_4=-2$$

$$x_3=\frac{8}{9}-\frac{5}{9}x_4=2$$

$$x_2=3-6x_3-4x_4=-1$$

$$x_1=-1+2x_2-x_3-3x_4=1$$

El determinante de la matriz del sistema inicial es igual al producto de los sucesivos pivotes, siendo su valor

$$|\underset{\sim}{A}|=2\cdot 1\cdot(-36)\,(-4)=288$$

*Ejemplo 4.2* Aplicar el Método de eliminación de Gauss a la solución del sistema

$$\begin{aligned} 3x_1-3x_2+6x_3+9x_4&=6\\ 2x_1-2x_2+4x_3+7x_4&=5\\ x_1+3x_2+6x_3+7x_4&=14\\ 4x_1+\ x_2+3x_3-3x_4&=13 \end{aligned}$$

En este ejemplo uno de los pivotes es nulo, aunque la matriz es no singular. Dividiendo la primera ecuación por 3 y sustituyendo cada una de las restantes por su diferencia con el resultado obtenido previamente multiplicado por su coeficiente de $x_1$, resulta

$$x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2$$
$$x_4 = 1$$
$$4x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 12$$
$$5x_2 - 5x_3 - 15x_4 = 5$$

En este paso aparece un pivote nulo, situación que puede resolverse con un cambio de orden de las ecuaciones. Permutando la segunda y la cuarta resulta el sistema

$$x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2$$
$$5x_2 - 5x_3 - 15x_4 = 5$$
$$4x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 12$$
$$x_4 = 1$$

cuya solución es

$$x_1 = 4 \quad ; \quad x_2 = 3 \quad ; \quad x_3 = -1 \quad ; \quad x_4 = 1$$

En cuanto al determinante de la matriz del sistema es igual al producto de los pivotes cambiado de signo, ya que se ha hecho una permutación entre filas. El lector puede comprobar que su valor es

$$|\underset{\sim}{A}| = (-1) \cdot 3 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 1 = -120$$

*Ejemplo 4.3* Detección de la singularidad de la matriz del sistema.

Sea el sistema de ecuaciones

$$2x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 4x_4 = 10$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 9$$
$$2x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 7x_4 = 18$$
$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 10$$

Aplicando el método de eliminación de Gauss, de la primera transformación resulta

$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 5$$
$$-2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 4$$
$$-x_2 - x_3 + 3x_4 = 8$$
$$-3x_2 - 3x_3 = 0$$

Siguiendo con el algoritmo se obtiene

$$
\begin{aligned}
x_1+3x_2+4x_3+2x_4&= \;\;5\\
x_2+\;\;x_3-\;\;x_4&=-2\\
2x_4&= \;\;6\\
-3x_4&=-6
\end{aligned}
$$

El pivote de la tercera ecuación es nulo, situación que no puede evitarse permutándola con la siguiente, lo que indica que la matriz es singular y el sistema incompatible o indeterminado. En este caso es incompatible como se desprende de la observación de las dos últimas ecuaciones.

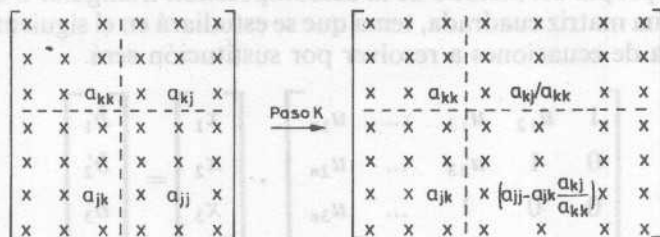



Figura 4.1 Algoritmo de Gauss.

La matriz $\underset{\sim}{U}$ y el vector $\underset{\sim}{b}'$ de la expresión (4.14), que permiten resolver por «back substitution» un sistema lineal, se han obtenido modificando en pasos sucesivos las ecuaciones. Parece obvio que también puedan determinarse a partir de la matriz del sistema $\underset{\sim}{A}$ ampliada con el vector de términos independientes $\underset{\sim}{b}$. Siguiendo el algoritmo expresado en las ecuaciones (4.25), la transformación $k$-ésima de dicha matriz ampliada consiste en su sustitución por otra de las mismas dimensiones, de forma que el elemento $a_{kk}$ y los situados en su columna por debajo de él ($a_{ik}$, $i \geqslant k$) permanecen invariantes; los de su fila situados a su derecha ($a_{kj}$, $j>k$) se sustituyen por su cociente por $a_{kk}$, elemento que recibe el nombre de pivote, y cada uno de los elementos situados debajo y a la derecha de $a_{kk}$ ($a_{mn}$, $m>k$, $n>k$) se sustituyen por su diferencia con el producto del término de su fila en la columna $k$ ($a_{mk}$) y el de su columna en la fila $k$ ($a_{kn}$). En este algoritmo el primer pivote es $a_{11}$ y el último el resultado de aplicar $(n-1)$ transformaciones a $a_{nn}$. En la figura 4.1 se presenta un esquema del paso $k$ del denominado algoritmo de Gauss.

La matriz resultante es

$$
\left[\begin{array}{cccccc|c}
a_{11} & a_{12}^1 & a_{13}^1 & \dots & a_{1n}^1 & & b_1^1 \\
a_{21} & a_{22}^1 & a_{23}^2 & \dots & a_{2n}^2 & & b_2^2 \\
a_{31} & a_{32}^1 & a_{33}^2 & \dots & a_{3n}^3 & & b_3^3 \\
\hline
a_{n1} & a_{n2}^1 & a_{n3}^2 & \dots & a_{nn}^{n-1} & & b_n^n
\end{array}\right] \qquad (4.27)
$$

en la que los superíndices indican el número de pasos del algoritmo necesarios para el cálculo de cada uno de los elementos. Esta matriz puede escribirse como

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} l_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} & b'_1 \\ l_{21} & l_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} & b'_2 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & u_{3n} & b'_3 \\ \hline l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} & b'_n \end{array}\right] = [\underset{\sim}{Q} \mid \underline{b}'] \tag{4.28}$$

con lo que no sólo se simplifica la notación sino que, además, se introduce la terminología propia del método de la descomposición triangular o descomposición LU de una matriz cuadrada, tema que se estudiará en el siguiente apartado.

El sistema de ecuaciones a resolver por sustitución será

$$\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & u_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ b'_n \end{bmatrix} \tag{4.29}$$

y según el algoritmo que se ha descrito las expresiones generales para el cálculo de la matriz $[\underset{\sim}{Q} \mid \underline{b}]$ son

$$\begin{aligned} & b'_1 = b_1 / l_{11} \\ & b'_k = \frac{1}{l_{kk}} \left( b_k - \sum_{m=1}^{k-1} l_{km} \, b'_m \right) \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & u_{1j} = a_{1j} / a_{11} \; ; \quad j > 1 \\ & u_{kj} = \frac{1}{l_{kk}} \left( a_{kj} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{km} \, u_{mj} \right) \; ; \quad j > k \; ; \quad k = 2, \dots, n \\ & l_{i1} = a_{i1} \; ; \quad i = 1, \dots, n \\ & l_{ik} = a_{ik} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{im} \, u_{mk} \; ; \quad i \geq k, \, k = 2, \dots, n \end{aligned} \tag{4.30}$$

Los sucesivos pivotes son $l_{kk}$ por lo que

$$|\underset{\sim}{A}| = (-1)^m \prod_{k=1}^{n} l_{kk} \tag{4.31}$$

donde $m$ indica el número de permutaciones entre filas efectuados.

A partir de $\underset{\sim}{Q}$ se definen dos matrices, denominadas $\underset{\sim}{L}$ y $\underset{\sim}{U}$, que son triangulares inferior y superior respectivamente y responden a la siguiente forma general

$$\underset{\sim}{L}=\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \quad \underset{\sim}{U}=\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & u_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{4.32}$$

Estas matrices coinciden con el resultado de la descomposición triangular o descomposición LU de la matriz $\underset{\sim}{A}$, fundamento del método que se presenta en el siguiente apartado.

Por otra parte, uno de los factores con mayor incidencia en la eficacia de un algoritmo es el tiempo requerido en su ejecución, que puede evaluarse a través del número estimado de operaciones aritméticas necesarias. Para el caso que se está tratando, en el paso $k$ se requieren $(n-k+1)$ divisiones por el pivote $l_{kk}$ y $(n-k)\,(n-k+1)$ operaciones que combinan un producto y una diferencia. El número total de las primeras es

$$\sum_{k=1}^{n} (n-k+1)=\frac{n^2+n}{2} \approx \frac{n^2}{2} \tag{4.33}$$

aproximación válida, si el orden $n$ de la matriz $\underset{\sim}{A}$ es elevado, mientras que el número de las correspondientes al segundo tipo viene dado por

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n-k)\,(n-k+1)=\frac{n^3-n}{3} \approx \frac{n^3}{3} \tag{4.34}$$

valor que constituye una buena estimación del número de operaciones necesarias para obtener el sistema (4.14) a partir del expresado en (4.13).

En cuanto al proceso de sustitución son necesarias

$$\sum_{k=1}^{n} (k-1)=\frac{n^2-n}{2} \approx \frac{n^2}{2} \tag{4.35}$$

operaciones.

*Ejemplo 4.4* Se trata de transformar el sistema de ecuaciones del ejemplo 4.1 en otro que tenga la misma solución y cuya matriz sea triangular superior, con los elementos de la diagonal principal iguales a la unidad.

Para ello se aplicará el algoritmo descrito a la matriz ampliada

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 & 6 & -2 \\ -2 & 5 & 4 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & 14 & 18 & -10 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

según los siguientes pasos.

Paso 1. Pivote: $a_{11}=2$

$$\left[\begin{array}{c:cccc} 2 & -4/2 & 2/2 & 6/2 & -2/2 \\ \hdashline -2 & 5-(-2)(-2) & 4-(-2)1 & -2-(-2)\cdot 3 & 5-(-2)(-1) \\ 2 & 4-2(-2) & 14-2\cdot 1 & 18-2\cdot 3 & -10-2(-1) \\ 1 & 1-1(-2) & 1-1\cdot 1 & 1-1\cdot 3 & 0-1(-1) \end{array}\right]$$

La matriz resultante es

$$\left[\begin{array}{c:cccc} 2 & -2 & 1 & 3 & -1 \\ \hdashline -2 & 1 & 6 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & 12 & 12 & -8 \\ 1 & 3 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Paso 2. Pivote: $a_{22}=1$

$$\left[\begin{array}{cc:ccc} 2 & -2 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 6/1 & 4/1 & 3/1 \\ \hdashline 2 & 8 & 12-8\cdot 6 & 12-8\cdot 4 & -8-8\cdot 3 \\ 1 & 3 & 0-3\cdot 6 & -2-3\cdot 4 & 1-3\cdot 3 \end{array}\right]$$

Efectuadas las operaciones resulta

$$\left[\begin{array}{cc:ccc} 2 & -2 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 6 & 4 & 3 \\ \hdashline 2 & 8 & -36 & -20 & -32 \\ 1 & 3 & -18 & -14 & -8 \end{array}\right]$$

Paso 3. Pivote: $a_{33}=-36$

$$
\left[\begin{array}{rrr:cc}
2 & -2 & 1 & 3 & -1 \\
-2 & 1 & 6 & 4 & 3 \\
2 & 8 & -36 & -20/-36 & -32/-36 \\
\hdashline
1 & 3 & -18 & -14-(-18)\,5/9 & -8-(-18)\,8/9
\end{array}\right]
$$

resultando la matriz

$$
\left[\begin{array}{rrr:rr}
2 & -2 & 1 & 3 & -1 \\
-2 & 1 & 6 & 4 & 3 \\
2 & 8 & -36 & 5/9 & 8/9 \\
\hdashline
1 & 3 & -18 & -4 & 8
\end{array}\right]
$$

Paso 4. Pivote: $a_{44}=-4$

En este paso solamente hay que sustituir el elemento $a_{45}=8$ por su cociente con el pivote $a_{44}=-4$ resultando como matriz final del proceso $[\underset{\sim}{Q}\,|\,\underline{b}']$

$$
\begin{bmatrix}
2 & -2 & 1 & 3 & -1 \\
-2 & 1 & 6 & 4 & 3 \\
2 & 8 & -36 & 5/9 & 8/9 \\
1 & 3 & -18 & -4 & -2
\end{bmatrix}
$$

A partir de esta matriz puede escribirse el sistema de ecuaciones

$$
\begin{bmatrix}
1 & -2 & 1 & 3 \\
0 & 1 & 6 & 4 \\
0 & 0 & 1 & 5/9 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 8/9 \\ -2 \end{bmatrix}
$$

que coincide con el obtenido en el desarrollo del ejemplo 4.1.

Por otra parte, el determinante de la matriz $\underset{\sim}{A}$ puede obtenerse por el producto de pivotes según

$$
|\underset{\sim}{A}| = 2\cdot 1\cdot(-36)\,(-4) = 288
$$

*Ejemplo 4.5* Aplicar el algoritmo de Gauss al sistema de ecuaciones siguiente

$$
\begin{aligned}
3x_1-3x_2+6x_3+9x_4&=6\\
2x_1-2x_2+4x_3+7x_4&=5\\
x_1+3x_2+6x_3+7x_4&=14\\
4x_1+x_2+3x_3-3x_4&=13
\end{aligned}
$$

que corresponde al tratado en el ejemplo 4.2.

Los resultados parciales en la aplicación del algoritmo son

1.

$$
\left[\begin{array}{cc|cccc}
3 & -1 & 2 & 3 & 2\\
2 & 0 & 0 & 1 & 1\\
1 & 4 & 4 & 4 & 12\\
4 & 5 & -5 & -15 & 5
\end{array}\right]
$$

Al ser el pivote nulo se procede a una permutación de ecuaciones que no es necesario que afecte a las columnas procesadas ya que sus valores no intervienen en los pasos siguientes del algoritmo.

2.

$$
\begin{array}{c|cccc}
3 & -1 & 2 & 3 & 2\\
\hline
2 & 5 & -5 & -15 & 5\\
1 & 4 & 4 & 4 & 12\\
4 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}
$$

3.

$$
\begin{array}{cc|ccc}
3 & -1 & 2 & 3 & 2\\
2 & 5 & -1 & -3 & 1\\
\hline
1 & 4 & 8 & 16 & 8\\
4 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}
$$

4.

$$
\begin{array}{ccc|cc}
3 & -1 & 2 & 3 & 2\\
2 & 5 & -1 & -3 & 1\\
1 & 4 & 8 & 2 & 1\\
\hline
4 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}
$$

Ahora habrá que dividir el término $a_{45}$ por el $a_{44}$, paso que se omite al ser el pivote igual a la unidad.

El sistema a resolver se ha transformado en

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 2 \\ x_2 - \ x_3 - 3x_4 &= 1 \\ x_3 + 2x_4 &= 1 \\ x_4 &= 1 \end{aligned}$$

cuya solución es $x_1 = 4$; $x_2 = 3$; $x_3 = -1$; $x_4 = 1$. Por otra parte, el determinante de la matriz del sistema es igual al producto de los pivotes cambiado de signo, al haberse hecho una permutación entre filas. Su valor es

$$|\underset{\sim}{A}| = (-1) \cdot 3 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 1 = -120$$

Si el sistema tratado fuese el del ejemplo 4.3, se observaría que no puede evitarse por permutación entre filas que el pivote sea nulo, lo que indica que la matriz del sistema es singular.

### 4.3.2 Método de descomposición triangular

La característica más importante del método de descomposición triangular es que las transformaciones que implica afectan únicamente a la matriz del sistema, por lo que los resultados obtenidos son válidos para todos los sistemas de ecuaciones que sólo se diferencian en el término independiente.

El método consiste en la determinación de dos matrices, $\underset{\sim}{L}$ y $\underset{\sim}{U}$, triangulares inferior y superior, respectivamente, de la forma

$$\underset{\sim}{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}; \quad \underset{\sim}{U} = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & u_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{4.36}$$

cuyo producto sea igual a la matriz del sistema, según

$$\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{U} \tag{4.37}$$

con lo que la expresión

$$\underset{\sim}{A}\underline{x} = \underline{b} \tag{4.38}$$

se transforma en

$$\underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{U}\underline{x} = \underline{b} \tag{4.39}$$

sistema del que puede obtenerse la solución a través de dos procesos de sustitución que se describirán más adelante.

Las expresiones que relacionan los valores de los elementos de $\underset{\sim}{L}$ y $\underset{\sim}{U}$ con los de la matriz $\underset{\sim}{A}$, se obtienen desarrollando la igualdad (4.37). En efecto, los elementos no nulos de la fila $i$-ésima de $\underset{\sim}{L}$ son

$$l_{i1},\, l_{i2},\, \ldots,\, l_{ii} \tag{4.40}$$

mientras que los de la columna $k$-ésima de $\underset{\sim}{U}$, son

$$u_{1k},\, u_{2k},\, \ldots,\, u_{k-1k},\, 1 \tag{4.41}$$

por lo que un elemento, $a_{ik}$ con $i \geqslant k$ de la matriz $\underset{\sim}{A}$, igual al producto de $\underset{\sim}{L}$ y $\underset{\sim}{U}$, será

$$a_{ik} = \sum_{m=1}^{k} l_{im}\, u_{mk} = l_{ik} + \sum_{m=1}^{k-1} l_{im}\, u_{mk} \tag{4.42}$$

de donde

$$l_{ik} = a_{ik} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{im}\, u_{mk} \quad ; \quad i \geqslant k \tag{4.43}$$

Para los elementos $a_{kj}$ con $k < j$ se cumple que

$$a_{kj} = \sum_{m=1}^{k} l_{km}\, u_{mj} = l_{kk}\, u_{kj} + \sum_{m=1}^{k-1} l_{km}\, u_{mj} \tag{4.44}$$

igualdad de la que se obtiene el valor de $u_{kj}$ según

$$u_{kj} = \frac{1}{l_{kk}} \left( a_{kj} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{km}\, u_{mj} \right) \tag{4.45}$$

Estas expresiones de $l_{ik}$ y $u_{kj}$ coinciden con las que se obtuvieron en el desarrollo del método de Gauss, por lo que el algoritmo que allí se describió para la determinación de la matriz $\underset{\sim}{Q}$, de la que por inspección se obtienen $\underset{\sim}{L}$ y $\underset{\sim}{U}$, es directamente aplicable a la descomposición triangular o descomposición $\underset{\sim}{\text{LU}}$ de una matriz cuadrada.

Otro algoritmo que conduce a los mismos resultados es el de Crout, que consiste en la aplicación directa de las expresiones (4.43) y (4.45) obteniéndose cada elemento de la matriz $\underset{\sim}{Q}$ en un solo paso.

A título de ejemplo se presenta la aplicación de los dos algoritmos a la matriz

$$\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Los resultados parciales al aplicar el de Gauss son

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & -3 & -6 \\ 3 & -4 & -8 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

mientras que los obtenidos al aplicar el de Crout son

$$\begin{matrix} 3 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & & & \\ 3 & & & \\ 1 & & & \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 3 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & & \\ 1 & 1 & & \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 3 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 3 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & -6 \end{matrix}$$

siendo en ambos casos las matrices $\underset{\sim}{L}$ y $\underset{\sim}{U}$ iguales a

$$\underset{\sim}{L} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -6 \end{bmatrix} \; ; \quad \underset{\sim}{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

cuyo producto coincide con la matriz $\underset{\sim}{A}$, como puede comprobarse fácilmente.

La diferencia más importante entre los dos algoritmos es que en el de Gauss los elementos de la matriz se modifican en cada uno de los pasos hasta adquirir su valor definitivo, mientras que en el de Crout cambian una sola vez en todo el proceso, lo que al ser implementado en un programa se traduce en una reducción del número de accesos a memoria y, como consecuencia, del tiempo de ejecución.

Por el contrario, el algoritmo de Gauss presenta ventajas en la reordenación de filas y columnas que tiene interés efectuar en cada uno de los pasos para mejorar la precisión de los resultados, además de ser imprescindible cuando el pivote se anula. Sobre este tema se volverá más adelante, aunque conviene destacar que si en el proceso de descomposición LU se permutan dos filas, el producto de la matrices $\underset{\sim}{L}$ y $\underset{\sim}{U}$ obtenidas es igual a la matriz $\underset{\sim}{A}$ con dichas filas

cambiadas. Además, si no se puede evitar que el pivote sea nulo, al ser iguales a cero todos los elementos de su columna situados en las filas posteriores, la matriz $\underset{\sim}{A}$ es singular y el sistema incompatible o indeterminado.

En la implementación de los dos algoritmos no se requiere reservar localidades de memoria para las matrices $\underset{\sim}{L}$ y $\underset{\sim}{U}$, sino que los resultados parciales que se obtienen sustituyen a los correspondientes elementos de la matriz $\underset{\sim}{A}$. Esto es posible ya que una vez se ha procesado una fila y una columna de $\underset{\sim}{A}$ sus valores no se utilizan posteriormente, ni en los pasos siguientes del algoritmo ni en los dos procesos de sustitución que conducen a la solución del sistema de ecuaciones.

Obtenidos los factores $\underset{\sim}{L}$ y $\underset{\sim}{U}$ de la matriz $\underset{\sim}{A}$ el problema se reduce a la solución del sistema (4.39) que no puede hacerse directamente sino que exige dos procesos de sustitución. En efecto, si en la expresión (4.39) se define el vector $\underline{z}$ según

$$\underset{\sim}{U}\underline{x}=\underline{z} \tag{4.46}$$

su valor puede obtenerse a partir de

$$\underset{\sim}{L}\underline{z}=\underline{b} \tag{4.47}$$

lo que constituye el paso previo al cálculo de $\underline{x}$, como solución del sistema (4.46).

En conclusión, aplicando este método es necesario resolver los sistemas (4.47) y (4.46).

En cuanto al primero puede desarrollarse según

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \dots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{4.48}$$

cuya solución se obtiene a través de un proceso de sustitución en el que cada variable interviene en el cálculo de las siguientes, razón por la que recibe el nombre de sustitución progresiva o «forward substitution». La expresión de las componentes del vector $\underline{z}$ es

$$\begin{aligned} z_1 &= b_1/l_{11} \\ z_2 &= (b_2-l_{21}z_1)/l_{22} \\ z_3 &= (b_3-l_{31}z_1-l_{32}z_2)/l_{33} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_n &= (b_n-l_{n1}z_1-l_{n2}z_2-\dots-l_{nn-1}z_{n-1})/l_{nn} \end{aligned} \tag{4.49}$$

que responde a la forma general

$$z_1=b_1/l_{11}$$
$$z_i=\frac{1}{l_{ii}}\left(b_i-\sum_{m=1}^{i-1} l_{im}z_m\right) \qquad i=2,\dots,n \tag{4.50}$$

coincidiendo el vector $\underline{z}$ con el $\underline{b}'$, transformado del término independiente $\underline{b}$ en el Método de eliminación de Gauss.

Además del algoritmo descrito existe otro que consiste en obtener el valor de una variable $z_i$ y restar de los términos independientes siguientes el producto $l_{ki}z_i$ para $k>i$. De su primer paso se obtiene

$$z_1=b_1/l_{11}$$
$$\begin{bmatrix} l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \dots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2-l_{21}z_1 \\ b_2-l_{31}z_1 \\ \dots \\ b_n-l_{n1}z_1 \end{bmatrix} \tag{4.51}$$

y repitiendo el procedimiento se determinan los componentes del vector $\underline{z}$.

El sistema de ecuaciones $Ux=z$, cuyo desarrollo es

$$\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & u_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \dots \\ z_n \end{bmatrix} \tag{4.52}$$

tiene como solución

$$x_n=z_n$$
$$x_i=z_i-\sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}x_j \;;\quad i=n-1,\dots,1 \tag{4.53}$$

expresiones que corresponden a un proceso de sustitución regresivo «back substitution».

También en este caso puede aplicarse otro algoritmo que consiste en obtener el valor de una variable $x_i$ y restar, de los términos independientes, el producto $u_{ki}x_i$ para $k<i$. El primer paso de este algoritmo responde a las expresiones

$x_n = z_n$

$$\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n-1} \\ 0 & 1 & u_{23} & \dots & u_{2n-1} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & u_{3n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 - u_{1n} x_n \\ z_2 - u_{2n} x_n \\ z_3 - u_{3n} x_n \\ \dots \\ z_{n-1} - u_{n-1n} x_n \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

proceso que aplicado repetidamente conduce a la determinación del vector $\underset{\sim}{x}$.

En cuanto al determinante de la matriz $\underset{\sim}{A}$ puede calcularse según

$$|\underset{\sim}{A}| = |\underset{\sim}{L}|\,|\underset{\sim}{U}| = \prod_{k=1}^{n} l_{kk} \quad (4.55)$$

expresión que se basa en que el determinante de $\underset{\sim}{U}$ es igual a la unidad y el de $\underset{\sim}{L}$ al producto de los elementos de la diagonal principal.

En caso de que se hayan efectuado permutaciones entre filas la expresión (4.55) debe incorporar el factor $(-1)^m$, donde $m$ es el número de cambios realizados.

Uno de los factores que mayor influencia tienen en la falta de precisión de los resultados obtenidos al resolver un sistema de ecuaciones son los errores de redondeo. Se puede demostrar que se logra su reducción evitando el crecimiento de los valores de los términos de la matriz, para lo que pueden seguirse dos estrategias. La primera, que se califica de completa, consiste en elegir como pivote el elemento de la matriz reducida que tiene mayor valor absoluto, mientras que la segunda, a la que se denomina parcial, se limita a hacer la elección entre los elementos de la primera columna, de dicha matriz. Parece evidente, que la estrategia parcial requiere un menor tiempo de ejecución ya que sólo es necesario determinar el mayor elemento de una columna frente a la completa en la que es preciso actuar sobre todos los términos de la matriz. Por otra parte, si se utiliza el algoritmo de Crout sólo tiene sentido aplicar la estrategia parcial a los elementos de la columna que se han procesado, ya que los valores del resto de la matriz pueden cambiar significativamente antes de poder ser utilizados como pivotes. Por el contrario, con el algoritmo de Gauss puede aplicarse la estrategia completa y la parcial.

En conclusión, el método de descomposición triangular consiste en la determinación de dos matrices $\underset{\sim}{L}$ y $\underset{\sim}{U}$, triangulares superior e inferior, respectivamente, cuyo producto sea igual a la matriz del sistema $\underset{\sim}{A}$ y la aplicación de dos procesos de sustitución. El número de operaciones a efectuar es el mismo que en el de la eliminación de Gauss, aunque al afectar, en su primera fase, únicamente a la matriz del sistema, los resultados obtenidos son de aplicación inmediata a todos los que sólo se diferencian en el vector de términos independientes.

Los tres siguientes ejemplos, que corresponden a distintos casos que pueden

presentarse, ayudan a la comprensión del Método. En ellos se aplicará el algoritmo de Gauss y no se efectuarán cambios de filas, salvo que alguno de los pivotes sea nulo.

*Ejemplo 4.6* Solución de un sistema de ecuaciones lineales y algebraicas por aplicación del método de descomposición triangular.

El sistema a resolver es

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 & 6 \\ -2 & 5 & 4 & -2 \\ 2 & 4 & 14 & 18 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En el ejemplo 4.4 se ha determinado la matriz $\underset{\sim}{Q}$, de la que pueden obtenerse $\underset{\sim}{L}$ y $\underset{\sim}{U}$ según

$$\underset{\sim}{L} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & -36 & 0 \\ 1 & 3 & -18 & -4 \end{bmatrix} ; \quad \underset{\sim}{U} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5/9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El determinante de $\underset{\sim}{A}$ es

$$|\underset{\sim}{A}| = 2 \cdot 1\ (-36) \cdot (-4) = 288$$

El sistema

$$\underset{\sim}{L}\underset{=}{z} = \underset{=}{b}$$

que en este caso es

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & -36 & 0 \\ 1 & 3 & -18 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

puede resolverse por un algoritmo cuyo primer paso es

$$z_1 = -1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & -36 & 0 \\ 3 & -18 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+2(-1) \\ -10-2(-1) \\ 0-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

resultando

$$z = [-1,\ 3,\ 8/9,\ -2]^t$$

La solución del sistema

$$\underline{U}\underline{x} = \underline{z}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5/9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 8/9 \\ -2 \end{bmatrix}$$

que coincide con el que se obtuvo en el ejemplo 4.1 al aplicar el método de eliminación de Gauss, se determina por aplicación del algoritmo descrito, cuyo primer paso es

$$x_4 = -2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-3(-2) \\ 3-4(-2) \\ 8/9-5/9(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ 2 \end{bmatrix}$$

resultando

$$x_1 = 1 \quad ; \quad x_2 = -1 \quad ; \quad x_3 = 2 \quad ; \quad x_4 = -2$$

que lógicamente coincide con la obtenida en el ejemplo 4.1.

*Ejemplo 4.7* Aplicar el método de la descomposición LU a la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 6 & 9 \\ 2 & -2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 14 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Aplicando el algoritmo de Gauss, el primer paso da como resultado la matriz

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & -1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & -5 & -15 \end{array}$$

en la que el pivote es nulo. Permutando la segunda y cuarta filas resulta

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & -1 & 2 & 3 \\ \cline{2-4} 4 & 5 & -5 & -15 \\ 1 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Siguiendo con el algoritmo se obtiene

$$\begin{array}{cc|cc} 3 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 & -3 \\ \hline 1 & 4 & 8 & 16 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad \underline{Q}=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 & -3 \\ 1 & 4 & 8 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de donde

$$\underline{L}=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \underline{U}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El producto de las matrices $\underline{L}$ y $\underline{U}$ es igual al resultado de permutar las filas segunda y cuarta en la matriz $\underline{A}$, permutación que también debe afectar a los términos independientes de las ecuaciones, por lo que el sistema para el cálculo del vector $\underline{z}$ es

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ 13 \\ 14 \\ 5 \end{bmatrix}$$

cuya solución es

$$z_1=2 \quad ; \quad z_2=1 \quad ; \quad z_3=1 \quad ; \quad z_4=1$$

Resolviendo el sistema

$$\underset{\sim}{U}\underline{x}=\underline{z}$$

se obtiene

$$x_1=4 \quad ; \quad x_2=3 \quad ; \quad x_3=-1 \quad ; \quad x_4=1$$

En cuanto al determinante de la matriz del sistema $\underset{\sim}{A}$ es igual al producto de los elementos de la diagonal principal de $\underset{\sim}{L}$ cambiado de signo

$$|\underset{\sim}{A}|=(-1)\cdot 3\cdot 5\cdot 8\cdot 1=-120$$

Una alternativa que tiene interés en el cálculo automático consiste en que el cambio de filas que hay que hacer cuando el pivote es nulo no afecte a las columnas de $\underset{\sim}{L}$ ya calculadas. Con este procedimiento la primera transformación se hace de la misma forma que en el método anterior, mientras que la permutación de las filas segunda y cuarta no afecta a la primera columna. El resultado es

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & -1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 5 & -5 & -15 \\ 1 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

siguiendo con el algoritmo resulta

$$\underset{\sim}{L}=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \underset{\sim}{U}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En el sistema

$$\underset{\sim}{L}\underline{z}=\underline{b}$$

la primera ecuación es

$$3z_1=6$$

que implica

$$z_1 = 2$$

El siguiente paso consiste en restar del término independiente de cada ecuación el producto del elemento de la primera columna multiplicando por $z_1$, resultando

$$\begin{bmatrix} 5-2\cdot 2 \\ 14-1\cdot 2 \\ 13-4\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix}$$

pero al haber permutado la segunda y cuarta filas este cambio debe afectar también al término independiente, con lo que se llega al sistema

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que coincide con el obtenido anteriormente.

El programa que se presenta en este texto se basa en el tratamiento de los pivotes nulos que se acaba de describir, y presenta la ventaja de reducir el número de accesos a memoria.

*Ejemplo 4.8* Detección de una matriz singular.
Sea el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \\ 18 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Aplicando el algoritmo para la descomposición triangular de la matriz del sistema resulta

$$\begin{array}{c:ccc} 2 & 3 & 4 & 2 \\ \hdashline 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & -3 & 0 \end{array}$$

La segunda transformación conduce a

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 4 | 2 |
| 1 | −2 | 1 | −1 |
| 2 | −1 | 0 | 2 |
| 2 | −3 | 0 | −3 |

donde el pivote y todos los elementos de su columna que pertenecen a las filas siguientes son nulos, lo que significa que la matriz es singular.

## 4.4 CALCULO DE LOS COEFICIENTES DE UN POLINOMIO POR INTERPOLACION

Los $(n+1)$ coeficientes $a_i$ de un polinomio de grado $n$, $P_n(x)$, pueden obtenerse por interpolación de $(n+1)$ valores, $P_n(x_k)$, que toma el polinomio para un número igual de valores $x_k$ de la variable.

En efecto, del polinomio

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \tag{4.56}$$

se derivan $(n+1)$ ecuaciones cuya expresión general es

$$a_0 + a_1 x_k + a_2 x_k^2 + \ldots + a_n x_k^n = y_k \quad ; \quad k=0, 1, \ldots, n \tag{4.57}$$

que forman el sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \ldots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix} \tag{4.58}$$

que puede expresarse como

$$\underset{\sim}{X}\underline{a} = \underline{y} \tag{4.59}$$

y de cuya solución se obtienen los coeficientes del polinomio.

Dicha solución existe y es única al ser el determinante de $\underset{\sim}{X}$, llamado de Vandermonde, igual a

$$|\underset{\sim}{X}| = \prod_{i>j=0}^{n} (x_i - x_j) \tag{4.60}$$

que es distinto de cero, siempre que

$$x_i \neq x_j \tag{4.61}$$

En principio, puede elegirse cualquier conjunto de valores de $x_k$, aunque la elección óptima es la de $(n+1)$ números complejos de módulo unidad, tales que la diferencia entre los argumentos de dos de ellos sucesivos, $x_{k+1}$ y $x_k$, sea constante e igual a $2\pi/n+1$, y que el primero sea real. La expresión general de $x_k$ es

$$x_k = e^{j2\pi k/n+1} \quad ; \quad k=0, 1, ..., n \tag{4.62}$$

siendo, para $k=0$ y cualquier valor de $n$

$$x_0 = 1 \tag{4.63}$$

Los números $x_k$, así definidos se representan en el plano complejo como un conjunto de puntos igualmente espaciados sobre la circunferencia de radio unidad, según se muestra en la figura 4.2 para distintos valores de $n$.

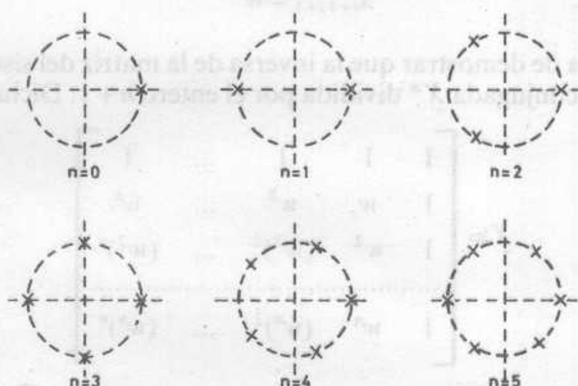



Figura 4.2 Puntos de interpolación para distintos grados del polinomio.

Si $n+1$ es par, el valor de $x_k$, para $k=(n+1)/2$ es igual a $-1$, ya que su argumento es

$$\frac{2\pi(n+1)}{2(n+1)} = \pi \tag{4.64}$$

Además, el conjugado de uno cualquiera de los puntos $x_k$ también pertenece al conjunto, correspondiéndole el número entero $(n+1-k)$. En efecto, su argumento es

$$\frac{2\pi(n+1-k)}{n+1} = -\frac{2\pi k}{n+1} \tag{4.65}$$

que coincide con el del conjugado de $x_k$.

Esta particular elección de los valores de $x_k$ se justifica por dos motivos. Por una parte, no se amplifican los errores de redondeo en la solución del sistema (4.59) y, por otra, dicha solución se ve facilitada al poder expresarse la matriz $\underset{\sim}{X}^{-1}$ en función de $\underset{\sim}{X}$, de forma compacta.

Se describe a continuación el algoritmo que permite la determinación de los coeficientes $a_j$ de un polinomio, a partir de sus valores $y_k$.

Definiendo la variable $w$ como

$$w = e^{j2\pi/n+1} \tag{4.66}$$

los valores de $x_k$ se pueden expresar como

$$x_k = w^k \quad ; \quad k = 0, 1, ..., n \tag{4.67}$$

y el elemento de la fila $(i+1)$ y de la columna $(j+1)$ en la matriz $X$ viene dado por

$$x_{i+1\,j+1} = w^{ij} \tag{4.68}$$

Se trata ahora de demostrar que la inversa de la matriz del sistema $\underset{\sim}{X}$ es igual a su transpuesta conjugada $\underset{\sim}{X}^*$ dividida por el entero $n+1$. Dichas matrices son

$$\underset{\sim}{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \dots & w^n \\ 1 & w^2 & (w^2)^2 & \dots & (w^2)^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & w^n & (w^n)^2 & \dots & (w^n)^n \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{X}^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w^{-1} & w^{-2} & \dots & w^{-n} \\ 1 & w^{-2} & (w^{-2})^2 & \dots & (w^{-2})^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & w^{-n} & (w^{-n})^2 & \dots & (w^{-n})^n \end{bmatrix} \tag{4.69}$$

siendo el término de la fila y columna $(i+1)$ de su producto igual a

$$\sum_{k=0}^{n} w^{ik} w^{-ik} = n+1 \tag{4.70}$$

mientras que el de su fila $(i+1)$ y columna $(j+1)$ es

$$\sum_{k=0}^{n} w^{ik} \cdot w^{-jk} = \sum_{k=0}^{n} (w^{i-j})^k \tag{4.71}$$

expresión en la que los $(n+1)$ sumandos forman una progresión geométrica de razón $(w^{i-j})$ y primer término igual a la unidad, siendo nula la suma de sus términos, ya que

$$\sum_{k=0}^{n} w^{(i-j)k} = \frac{w^{(i-j)(n+1)} - 1}{w^{(i-j)} - 1} = 0 \tag{4.72}$$

al ser

$$\left[w^{(n+1)}\right]^{i-j} = 1 \tag{4.73}$$

Con esto queda demostrado que

$$\underset{\sim}{X}\,\underset{\sim}{X}^* = (n+1)\,\underset{\sim}{I} \tag{4.74}$$

y, como consecuencia, que

$$\underset{\sim}{X}^{-1} = \frac{1}{n+1}\underset{\sim}{X}^* \tag{4.75}$$

La solución del sistema (4.59) puede expresarse como

$$\underline{a} = \underset{\sim}{X}^{-1}\,\underline{y} = \frac{1}{n+1}\underset{\sim}{X}^*\,\underline{y} \tag{4.76}$$

de la que pueden obtenerse los coeficientes del polinomio

$$a_i = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} y_k w^{-ik}\,; \qquad i = 0, 1, \ldots, n \tag{4.77}$$

siendo la expresión de sus valores, $y_k$

$$y_k = \sum_{i=0}^{n} a_i w^{ik} \tag{4.78}$$

Las expresiones (4.77) y (4.78) corresponden a las de la transformada directa e inversa discreta de Fourier (DFT) para cuyo cálculo existen algoritmos de gran eficacia.

Por otra parte, puede demostrarse que los efectos sobre $a_i$ de los errores de redondeo en la determinación de $x_k$ e $y_k$ se reducen al disminuir el parámetro $K(\underset{\sim}{X})$ definido por

$$K(\underset{\sim}{X})=\sqrt{\lambda_{máx}/\lambda_{mín}} \tag{4.79}$$

donde $\lambda_{máx}$ y $\lambda_{mín}$ son los valores propios máximo y mínimo de la matriz $\underset{\sim}{X}^*\underset{\sim}{X}$, siendo $\underset{\sim}{X}^*$ la matriz conjugada transpuesta de $\underset{\sim}{X}$.

Tal como han sido elegidos los valores de $x_k$ se cumple que

$$\underset{\sim}{X}^*\underset{\sim}{X}=(n+1)\underset{\sim}{I} \tag{4.80}$$

cuyos valores propios son todos iguales a $(n+1)$ y, en consecuencia, el valor de $K(\underset{\sim}{X})$ es igual a la unidad. Cualquier otra elección de $x_k$ hará que dichos valores propios sean distintos y que $K(\underset{\sim}{X})$ sea mayor que la unidad. De lo anterior se concluye que los valores elegidos son óptimos de cara a reducir los errores de redondeo en la solución del sistema.

En la determinación de los coeficientes de un polinomio puede suceder que su grado $n$ no sea conocido previamente y que la interpolación se haga a partir de $(n+m+1)$ valores de $y_k$, al suponer que su grado es $(n+m)$ y el polinomio de la forma

$$y_k=P_{n+m}(x)=\sum_{i=0}^{n+m} a'_i x^i \tag{4.81}$$

En un análisis exacto, los valores obtenidos serían

$$\begin{aligned} a'_i&=a_i \qquad i\leqslant n\\ a'_i&=0 \qquad i>n \end{aligned} \tag{4.82}$$

de forma que no se genera ningún error al suponer un grado mayor que el real.

En efecto, independientemente de los puntos $x_k$ elegidos, el sistema a resolver es de la forma

$$a'_0+a'_1x_k+\ldots+a'_nx_k^n+a'_{n+1}x_k^{n+1}+\ldots+a'_{n+m}x_k^{n+m}=y_k$$

$$k=0,\ 1,\ \ldots,\ n+m \tag{4.83}$$

cumpliéndose que

$$a_0+a_1x_k+a_2x_k^2+\ldots+a_nx_k^n=y_k \tag{4.84}$$

Restando las expresiones (4.83) y (4.84) se obtiene

$$\begin{gathered}(a'_0-a_0)+(a'_1-a_1)x_k+\ldots+(a'_n-a_n)x_k^n+a'_{n+1}x_k^{n+1}+\ldots+a'_{n+m}x_k^{n+m}=0\\ k=0,\ 1,\ \ldots\ n+m\end{gathered} \tag{4.85}$$

sistema de ecuaciones homogéneo que al tener que cumplirse para cualquier conjunto de valores de $x_k$, implica las igualdades expresadas en (4.82).

En caso de que la interpolación se haga por ordenador los valores de los coeficientes, que teóricamente tienen que ser nulos, darán resultados distintos de cero aunque de varios órdenes de magnitud menores que el resto por lo que podrán ser fácilmente detectados.

Este último aspecto tiene interés en el análisis automático de circuitos en el que con frecuencia se hace una estimación del orden del circuito superior al real.

*Ejemplo 4.9* Determinación de los coeficientes de un polinomio de tercer grado por interpolación.

Al ser el polinomio de tercer grado ($n=3$), el número de puntos de interpolación ha ser igual a cuatro ($n+1=4$). En este caso, el valor de $w$ es

$$w = e^{j2\pi/n+1} = e^{j\pi/2} = j$$

y los distintos puntos son

$$x_0 = w^0 = 1$$
$$x_1 = w^1 = j$$
$$x_2 = w^2 = -1$$
$$x_3 = w^3 = -j$$

Si los valores que toma el polinomio en dichos puntos son

$$y_0 = P_3(x_0) = 20$$
$$y_1 = P_3(x_1) = 8+2j$$
$$y_2 = P_3(x_2) = 4$$
$$y_3 = P_3(x_3) = 8-2j$$

sus coeficientes pueden determinarse por aplicación (4.77) según las expresiones

$$i=0 \ ; \ w^{-i}=1 \ ; \ a_0 = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} y_k =$$
$$= \frac{1}{4}(20+8+2j+4+8-2j) = 10$$

$$i=1 \ ; \ w^{-i}=j^{-1}=-j \ ; \ a_1 = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} y_k(-j)^k =$$
$$= \frac{1}{4}[20+(8+2j)(-j)+4(-1)+(8-2j)j] = 5$$

$$i=2\ ;\ w^{-i}=j^{-2}=-1\ ;\ a_2=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} y_k(-1)^k=$$
$$=\frac{1}{4}\left[20+(8+2j)(-1)+4+(8-2j)(-1)\right]=2$$

$$i=3\ ;\ w^{-i}=j^{-3}=j\ ;\ a_3=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} y_k(j)^k=$$
$$=\frac{1}{4}\left[20+(8+2j)(j)+4(-1)+(8-2j)(-j)\right]=3$$

El polinomio obtenido es

$$y=P_3(x)=3x^3+2x^2+5x+10$$

cuyos valores en los puntos de interpolación son

$$P_3(1)=20\ ;\ P_3(j)=8+2j\ ;\ P_3(-1)=4\ ;\ P_3(-j)=8-2j$$

que coinciden con los que se habían supuesto.

## 4.5 ELABORACION DE UN PROGRAMA SEMISIMBOLICO DE ANALISIS DE CIRCUITOS

Después de establecer el criterio para la elección de los puntos de interpolación, desarrollar los métodos para la solución de sistemas de ecuaciones lineales algebraicas y para la determinación de los coeficientes de un polinomio a partir de los valores que toma en un número de puntos superior como mínimo en una unidad a su grado, se pueden formular los pasos para la elaboración de un programa semisimbólico para el análisis de circuitos analógicos invariantes o de condensadores conmutados.

Estos pasos se concretan en:

1. Formulación automática del sistema de ecuaciones.

   Para ello se aplica el Método Nodal Modificado o el de los dos grafos a los circuitos analógicos, resultando un sistema de la forma

$$\underset{\sim}{T}\underline{X}=\underline{W} \tag{4.86}$$

   con los términos de la matriz del sistema $\underset{\sim}{T}$ de primer grado en $s$.

   En el caso de circuitos de condensadores conmutados de dos fases y con una sola señal de excitación se utiliza el Método Nodal por equilibrio de carga, que conduce a

$$\left[\begin{array}{c:c} \underset{\sim}{C}^r_{11} & \underset{\sim}{C}^r_{12} \\ \hdashline \underset{\sim}{C}^r_{21} & z\underset{\sim}{C}^r_{22} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \underline{V}^1 \\ \hdashline \underline{V}^2 \end{array}\right] = \underline{G}_1 V^1_{IN} + \underline{G}_2(z) V^2_{IN}(z) \tag{4.87}$$

donde los elementos de las matrices $\underset{\sim}{C}^r_{ij}$ son reales, $\underline{V}^1$ y $\underline{V}^2$ incluyen las transformadas $z$ de las secuencias formadas por los valores de las tensiones nodales en los instantes inmediatamente anteriores a las conmutaciones en cada una de las fases, mientras que $V^1_{IN}(z)$ y $V^2_{IN}(z)$ lo son de la señal de excitación.

En el caso de los circuitos SC de mayor interés práctico en los que no existen otros nodos que el de entrada y los de los amplificadores operacionales, que se consideran ideales, el orden de las matrices $\underset{\sim}{C}^r_{ij}$ coincide con el número de estos dispositivos y el vector $\underline{V}$ corresponde a las tensiones de sus nodos de salida.

2. Estimación del grado máximo de los polinomios de la función de red o de las funciones de transferencia parcial.

   En los circuitos analógicos es, como máximo, igual a la suma de los números de inductores, condensadores y amplificadores operacionales no ideales modelados con una función de transferencia que incluye un polo real, presentes en el circuito.

   En los circuitos de condensadores conmutados, con las restricciones antes citadas, coincide con el número de amplificadores operacionales.

3. Elección de los puntos de interpolación.

   Tanto para los circuitos analógicos como para los SC se elige un número de valores de la variable $s$ o $z$ superior en una unidad al de la estimación hecha para el grado máximo de los polinomios. Como se ha visto en el apartado anterior, dichos valores se representan en el plano complejo sobre la circunferencia de radio unidad, igualmente espaciados, siendo el primero de ellos real e igual a uno.

4. Cálculo del denominador de $H(s_i)$ o $H_{jk}(z_i)$.

   La descomposición LU de la matriz del sistema para cada valor de $s_i$ o $z_i$ según las expresiones

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{T}(s_i) &= \underset{\sim}{L}(s_i)\underset{\sim}{U}(s_i) \\ \underset{\sim}{C}(z_i) &= \underset{\sim}{L}(z_i)\underset{\sim}{U}(z_i) \end{aligned} \tag{4.88}$$

   permite el cálculo de su determinante, que coincide con el valor del denominador de la función de red o de las de transferencia parcial, según

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{D}(s_i) &= |\underset{\sim}{T}(s_i)| = \prod_{k=1}^{n} l_{kk} \\ \underset{\sim}{D}(z_i) &= |\underset{\sim}{C}(z_i)| = \prod_{k=1}^{n} l_{kk} \end{aligned} \tag{4.89}$$

5. Cálculo del numerador de $H(s_i)$ o $H_{jk}(z_i)$

La determinación del numerador de $H(s_i)$ o $H_{jk}(z_i)$ se hace a partir de la solución del sistema de ecuaciones del circuito.

En los circuitos analógicos se calcula la variable de salida $Y(s_i)$ después de igualar la excitación a la unidad, mientras que en los de condensadores conmutados de dos fases, para la obtención de $H_{jk}(z_i)$, se calcula el valor de la variable de salida en la fase $j$, después de igualar $V_{IN}^k$ a la unidad y $V_{IN}^j$ a cero.

Posteriormente, se obtiene el numerador de la función de red $H(s_i)$ o de la función de transferencia parcial $H_{jk}(z_i)$, según las expresiones

$$\begin{aligned} N(s_i) &= D(s_i)Y(s_i) \\ N_{jk}(z_i) &= D(z_i)V^j(z_i) \end{aligned} \tag{4.90}$$

Además, no es necesario repetir el proceso para todos los puntos $s_i$ o $z_i$, ya que los valores que toma un polinomio en $x_k$ y $x_k^*$ son complejos conjugados.

Puede suceder que uno de los puntos de interpolación coincida con un polo de la función de red o de la función de transferencia parcial, lo que implica que no puede completarse la descomposición LU de la matriz del sistema ni determinar su solución. El problema puede resolverse, en general, con un cambio de los puntos de interpolación aumentando el orden estimado del circuito.

*Ejemplo 4.10* Para el circuito de la figura 4.3, se trata de aplicar el método descrito a la determinación de la función de red

$$H(s) = \frac{V_5(s)}{V_{IN}(s)}$$

Las ecuaciones nodales del circuito, utilizando el modelo ideal del amplificador operacional son

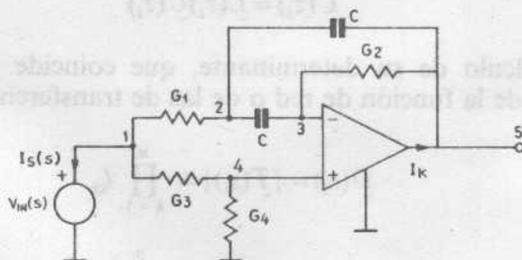



Figura 4.3 Diagrama de polos y ceros.

$$\begin{bmatrix} G_1+G_3 & -G_1 & 0 & -G_3 & 0 \\ -G_1 & 2Cs+G_1 & -Cs & 0 & -Cs \\ 0 & -Cs & Cs+G_2 & 0 & -G_2 \\ -G_3 & 0 & 0 & G_3+G_4 & 0 \\ 0 & -Cs & -G_2 & 0 & Cs+G_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{IN} \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_k \end{bmatrix}$$

Aplicando las transformaciones que la presencia de la fuente de tensión y del amplificador operacional impone, resulta el sistema

$$\begin{bmatrix} 2Cs+G_1 & -Cs & -Cs \\ -Cs & Cs+G_2 & -G_2 \\ 0 & G_3+G_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \\ V_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \\ G_3 \end{bmatrix} V_{IN}$$

que resuelto para $V_5(s)$ de la expresión de la función de red

$$H(s)=\frac{V_5(s)}{V_{IN}(s)}=\frac{G_3}{G_3+G_4}\,\frac{s^2+\left(2G_2-\dfrac{G_4G_1}{G_3}\right)\dfrac{1}{C}s+\dfrac{G_1G_2}{C^2}}{s^2+2\dfrac{G_2}{C}s+\dfrac{G_1G_2}{C^2}}$$

Si se impone la condición

$$2G_2-\frac{G_4G_1}{G_3}=-\,2G_2 \quad \Rightarrow \quad 4G_2G_3=G_4G_1$$

sus polos y ceros son simétricos con respecto al eje imaginario, siendo la función de red

$$H(s)=\frac{G_3}{G_3+G_4}\,\frac{s^2-\dfrac{2G_2}{C}s+\dfrac{G_1G_2}{C^2}}{s^2+\dfrac{2G_2}{C}s+\dfrac{G_1G_2}{C^2}}=\frac{R_4}{R_3+R_4}\,\frac{s^2-\dfrac{2}{R_2C}s+\dfrac{1}{R_1R_2C^2}}{s^2+\dfrac{2}{R_2C}s+\dfrac{1}{R_1R_2C^2}}$$

a la que, para el caso de polos y ceros complejos, corresponde un diagrama como el representado en la figura 4.4, donde

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{R_1R_2}\,C}$$

La función de red puede expresarse como

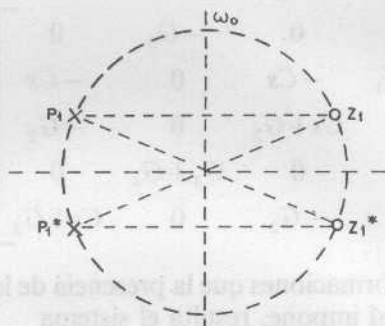


Figura 4.4 Diagrama de polos y ceros.

$$H(s)=\frac{R_4}{R_3+R_4}\,\frac{s^2-2\sqrt{\dfrac{R_1}{R_2}}\,\omega_0 s+\omega_0^2}{s^2+2\sqrt{\dfrac{R_1}{R_2}}\,\omega_0 s+\omega_0^2}$$

cuyo valor para $s=k\omega_0 j$ es

$$H(k\omega_0 j)=\frac{R_4}{R_3+R_4}\,\frac{(1-k^2)-2\sqrt{\dfrac{R_1}{R_2}}\,kj}{(1-k^2)+2\sqrt{\dfrac{R_1}{R_2}}\,kj}$$

número complejo de módulo igual a

$$|H(k\omega_0 j)|=\frac{R_4}{R_3+R_4}$$

para todo valor de $k$, y argumento

$$\arg H(k\omega_0 j)=-2\,\mathrm{tg}^{-1}\left(2\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\,\frac{k}{1-k^2}\right)$$

Las curvas de amplificación y desfase se representan en las figuras 4.5 y 4.6; respectivamente, en las que puede observarse que el circuito no tiene ningún efecto selectivo sobre la señal de entrada, y que sólo introduce un desfase de valor dependiente de la frecuencia, por lo que recibe el nombre de circuito desfasador.

A continuación, se realiza el análisis del circuito siguiendo los pasos que configuran un programa semisimbólico para la obtención de la función de red.

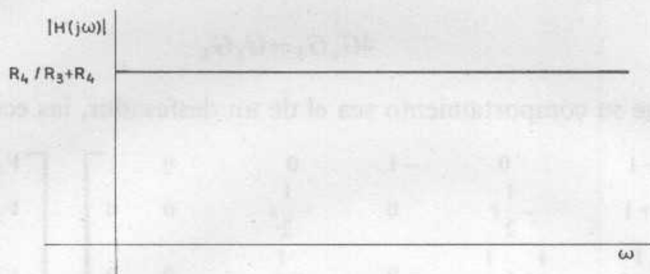


Figura 4.5 Curva de amplificación.

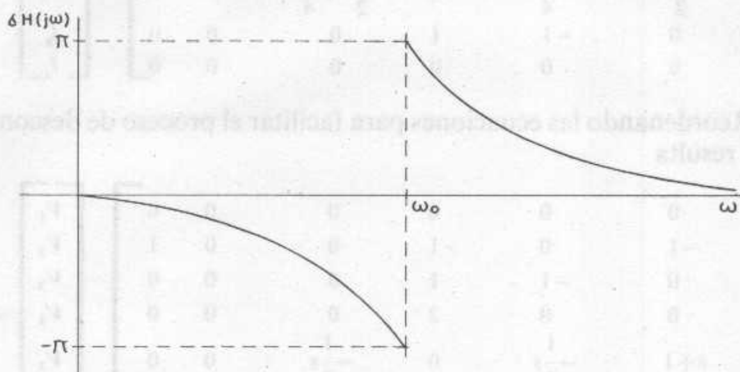


Figura 4.6 Curva de desfase.

1. Formulación del sistema de ecuaciones.
   Aplicando el Método Nodal Modificado se obtiene el sistema

$$\begin{bmatrix} G_1+G_3 & -G_1 & 0 & -G_3 & 0 & 0 & 1 \\ -G_1 & 2Cs+G_1 & -Cs & 0 & -Cs & 0 & 0 \\ 0 & -Cs & Cs+G_2 & 0 & -G_2 & 0 & 0 \\ -G_3 & 0 & 0 & G_3+G_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Cs & -G_2 & 0 & Cs+G_2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ I_k \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_{IN} \end{bmatrix}$$

Para los valores

$$G_1=1\ ;\ G_2=1/4\ ;\ G_3=G_4=1\ ;\ C=1/2$$

que cumplen la condición de diseño

$$4G_2G_3=G_1G_4$$

para que su comportamiento sea el de un desfasador, las ecuaciones son

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & s+1 & -\frac{1}{2}s & 0 & -\frac{1}{2}s & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}s & \frac{1}{2}s+\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}s & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2}s+\frac{1}{4} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ I_k \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_{IN} \end{bmatrix}$$

Reordenando las ecuaciones para facilitar el proceso de descomposición LU, resulta

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & s+1 & -\frac{1}{2}s & 0 & -\frac{1}{2}s & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}s & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2}s+\frac{1}{4} & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}s & \frac{1}{2}s+\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ I_k \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{IN} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Estimación del orden del circuito.
   Como máximo el orden del circuito es igual a dos, ya que contiene dos condensadores y para el amplificador operacional se utiliza el modelo ideal.
3. Elección de los puntos de interpolación.
   Al ser igual a dos el orden del circuito, se tiene que

$$w=e^{j2\pi/3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j$$

siendo los puntos de interpolación

$$s_0=1$$

$$s_1=w=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j$$

$$s_2=w^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j$$

4. Cálculo del denominador de la función de red para $s_k = 1$.
Para ello debe descomponerse la matriz del sistema en sus factores $\underset{\sim}{L}$ y $\underset{\sim}{U}$. Para $s = 1$ la matriz del sistema es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1/2 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/4 & 0 & 3/4 & -1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 3/4 & 0 & -1/4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La primera fila y la primera columna coinciden con las de la matriz $\underset{\sim}{Q}$, ya que el pivote es igual a la unidad. El algoritmo continúa utilizando como pivote el valor $-1$.

$$\left[\begin{array}{c:ccccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ \hdashline 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1/2 & -2 & -1/2 & 0 & 2 \\ -1/2 & -1/4 & 1/2 & 3/4 & -1 & -1/2 \\ -1/2 & 3/4 & 1/2 & -1/4 & 0 & -1/2 \end{array}\right]$$

En el siguiente paso el pivote es igual a $-1$, siendo el resultado de la transformación

$$\begin{array}{c:c:ccc} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline -1/2 & -5/2 & -1/2 & 0 & 2 \\ -1/4 & 1/4 & 3/4 & -1 & -1/2 \\ 3/4 & 5/4 & -1/4 & 0 & -1/2 \end{array}$$

El siguiente pivote sería igual a 2 y la transformación deja inalterada la matriz ya que los elementos en su fila situados a su derecha son todos nulos

$$\begin{array}{c:cc} -1/2 & 0 & -4 \\ \hdashline 3/4 & -1 & 5/2 \\ -1/4 & 0 & -3/2 \end{array}$$

El algoritmo continúa con

$$\begin{array}{c:c} -1 & -5/2 \\ \hdashline 0 & -3/2 \end{array}$$

Las matrices $\underset{\sim}{L}$ y $\underset{\sim}{U}$ resultantes son

$$\underset{\sim}{L}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1/2 & -5/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/4 & 1/4 & 3/4 & -1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 3/4 & 5/4 & -1/4 & 0 & -3/2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{U}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El valor del determinante de la matriz del sistema es

$$D(1)=1\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot 2\cdot(-1/2)\cdot(-1)\cdot(-3/2)=-3/2$$

5. Solución del sistema para $V_5(s)$, aplicando las sustituciones «back» y «forward» y cálculo del numerador de la función de red para $s_k=1$.

El sistema

$$\underset{\sim}{L}\underline{z}=\underline{b}$$

es, para este caso

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1/2 & -5/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/4 & 1/4 & 3/4 & -1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 3/4 & 5/4 & -1/4 & 0 & -3/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \\ z_7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuya solución es

$$z_1=1\ ;\ z_2=2\ ;\ z_3=0\ ;\ z_4=1/2\ ;\ z_5=7/2\ ;\ z_6=7/4\ ;\ z_7=-5/6$$

El sistema

$$\underset{\sim}{U}\underline{x}=\underline{z}$$

es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ I_k \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 7/2 \\ 7/4 \\ -5/6 \end{bmatrix}$$

cuya solución para $V_5$ se obtiene por aplicación del algoritmo de sustitución regresiva, de la siguiente forma

$$I_s=-5/6$$
$$I_k=7/4+5/2\cdot(-5/6)=-1/3$$
$$V_5=7/2+4\cdot(-5/6)=1/6$$
$$H(1)=5/6$$
$$N(1)=D(1)H(1)=-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6}=-\frac{1}{4}$$

Se trata, ahora, de repetir el proceso para

$$s_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j$$

Para este valor la matriz del sistema es

$$\begin{array}{r:cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1/2(1+\sqrt{3}j) & 1/4(1-\sqrt{3}j) & 0 & 1/4(1-\sqrt{3}j) & 0 & 0 \\ 0 & 1/4(1-\sqrt{3}j) & -1/4 & 0 & \sqrt{3}/4j & -1 & 0 \\ 0 & 1/4(1-\sqrt{3}j) & \sqrt{3}/4j & 0 & -1/4 & 0 & 0 \end{array}$$

Las matrices que se obtienen en los sucesivos pasos de la descomposición LU son

$$\left[\begin{array}{c|ccccc}
-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline
0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
1/2(1+\sqrt{3}j) & 1/4(1-\sqrt{3}j) & -1/2(1+\sqrt{3}j) & 1/4(1-\sqrt{3}j) & 0 & 1/2(1+\sqrt{3}j) \\
1/4(1-\sqrt{3}j) & -1/4 & -1/4(1-\sqrt{3}j) & \sqrt{3}/4j & -1 & 1/4(1-\sqrt{3}j) \\
1/4(1-\sqrt{3}j) & \sqrt{3}/4j & -1/4(1-\sqrt{3}j) & -1/4 & 0 & 1/4(1-\sqrt{3}j)
\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|c|ccc}
-1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \cline{2-5}
1/4(1-\sqrt{3}j) & 1/4(1+3\sqrt{3}j) & 1/4(1-\sqrt{3}j) & 0 & 1/2(1+\sqrt{3}j) \\
-1/4 & -1/2+\sqrt{3}/4j & \sqrt{3}/4j & -1 & 1/4(1-\sqrt{3}j) \\
\sqrt{3}/4j & -1/4+\sqrt{3}/2j & -1/4 & 0 & 1/4(1-\sqrt{3}j)
\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|cc}
1/4(1-\sqrt{3}j) & 0 & -1+\sqrt{3}j \\ \hline
\sqrt{3}/4j & -1 & 1 \\
-1/4 & 0 & 0
\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|c}
-1 & -1 \\ \hline
0 & 0
\end{array}\right]$$

El último pivote es nulo, lo que indica que la matriz del sistema es singular, que el denominador de la función de red es nulo o, lo que es

equivalente, que uno de los puntos de interpolación coincide con un polo de la función de red. Esta coincidencia se evita aumentando el orden estimado a tres, siendo, ahora, los puntos de interpolación

$$s_0 = 1 \; ; \; s_1 = j \; ; \; s_2 = -1 \; ; \; s_3 = -j$$

Los resultados que se obtienen se presentan en la siguiente tabla

| $s$ | $D(s)$ | $N(s)$ |
|---|---|---|
| 1 | $-3/2$ | $-1/4$ |
| $j$ | $-j/2$ | $j/4$ |
| $-1$ | $-1/2$ | $-3/4$ |
| $-j$ | $j/2$ | $-j/4$ |

6. Determinación de los coeficientes de los polinomios por interpolación.
Al ser el orden estimado igual a tres, el valor de $w$ es

$$w = e^{j2\pi/4} = j$$

y los coeficientes del polinomio del denominador de la función de red, se obtienen a partir de las expresiones

$$a_0 = \frac{1}{4}\,(D(1) + D(j) + D(-1) + D(-j)) = -1/2$$

$$a_1 = \frac{1}{4}\,(D(1) + D(j)j^{-1} + D(-1)j^{-2} + D(-j)j^{-3}) = -1/2$$

$$a_2 = \frac{1}{4}\,(D(1) + D(j)j^{-2} + D(-1)j^{-4} + D(-j)j^{-6}) = -1/2$$

$$a_3 = \frac{1}{4}\,(D(1) + D(j)j^{-3} + D(-1)j^{-6} + D(-j)j^{-9}) = 0$$

siendo los del numerador

$$b_0 = \frac{1}{4}\,(N(1) + N(j) + N(-1) + N(-j)) = -1/4$$

$$b_1 = \frac{1}{4}\,(N(1) + N(j)j^{-1} + N(-1)j^{-2} + N(-j)j^{-3}) = 1/4$$

$$b_2 = \frac{1}{4}\,(N(1) + N(j)j^{-2} + N(-1)j^{-4} + N(-j)j^{-6}) = -1/4$$

$$b_3=\frac{1}{4}\,(N(1)+N(j)j^{-3}+N(-1)j^{-6}+N(-j)j^{-9})=0$$

Como conclusión, la función de red es

$$H(s)=\frac{-1/4s^2+1/4s-1/4}{-1/2s^2-1/2s-1/2}=\frac{1}{2}\,\frac{s^2-s+1}{s^2+s+1}$$

que coincide con la obtenida en el análisis manual para los valores asignados a los elementos.

## 4.6 RESPUESTA TEMPORAL DE CIRCUITOS ANALOGICOS

Determinar la respuesta temporal de un circuito analógico e invariante significa obtener el valor de una de sus variables $y(t)$, definida como respuesta o salida, para todo valor de $t$, a partir de la excitación $x(t)$. El caso general corresponde a la respuesta con condiciones iniciales distintas de cero.

Para ello existen dos tipos de métodos basados, respectivamente, en el cálculo de la transformada inversa de Laplace de $Y(s)$ y en la integración del sistema de ecuaciones diferenciales que en el circuito pueden plantearse.

En los del primer grupo se parte de la expresión analítica de $Y(s)$, que para circuitos analógicos y lineales tiene la forma de un cociente de dos polinomios en $s$, según

$$Y(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=k\,\frac{(s-z_1)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)\ldots(s-p_n)} \qquad (4.91)$$

La descomposición de $Y(s)$ en fracciones simples y el posterior cálculo de los residuos asociados a cada polo conduce a la expresión analítica de $y(t)$, según se ha descrito en el primer capítulo de este texto. Este método, si bien es eficaz en el análisis manual de circuitos sencillos y en el automático de los de mayor complejidad, presenta el inconveniente de requerir el cálculo de los polos de $Y(s)$. Por el contrario, esta dificultad no aparece en los métodos numéricos de transformación inversa de Laplace, aunque de ellos no es posible obtener la expresión analítica de $y(t)$ sino solamente los valores que toma para distintos valores de la variable $t$.

Los métodos del segundo grupo se basan en la integración numérica del sistema de ecuaciones diferenciales del circuito. Antes de su descripción se aplicarán las fórmulas de integración más sencillas a la solución de la ecuación diferencial de primer orden, para, posteriormente, generalizar los resultados al sistema que resulta de aplicar el Método Nodal Modificado o el de los dos grafos.

### 4.6.1 Solución numérica de ecuaciones diferenciales de primer orden

*A) Fórmulas de integración*

La expresión general de una ecuación diferencial de primer orden en forma explícita es

$$y' = f(y,t) \tag{4.92}$$

pudiéndose escribir su solución como

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(y,t)\, dt \tag{4.93}$$

Los métodos numéricos para la determinación del valor de $y(t_1)$ se basan en hacer una estimación del valor medio de la derivada de $y(t)$ en el intervalo $(t_0, t_1)$. Es obvio que al hacer esta estimación se producirán errores y que éstos serán tanto mas importantes cuanto mayor sea la diferencia $t_1 - t_0$. Parece lógico, en consecuencia, definir un intervalo de amplitud pequeña de valor $h$ y calcular los términos de una sucesión $y_n$ cuyos valores se aproximen lo mas posible a

$$y(t_0 + nh)\ ;\ n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.94}$$

Para ello existen distintas fórmulas de integración de las cuales la mas simple es la «forward Euler», basada en sustituir en el intervalo $(t_0, t_0 + h)$ la curva por su tangente en el punto de abscisa $t_0$, según se ilustra en la figura 4.7.

En el supuesto de que se conozcan los valores iniciales $y_0$ y $t_0$ de las variables, la derivada en este punto se calcula particularizando la ecuación diferencial, según

$$y'_0 = f(y_0, t_0) \tag{4.95}$$

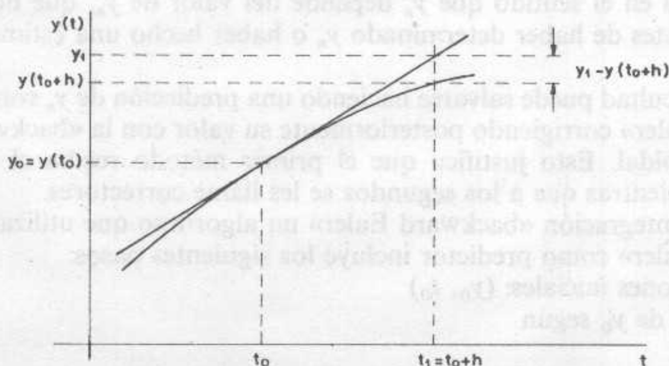



Figura 4.7 Integración «forward Euler».

y la estimación del valor de $y(t_0+h)$ se hace a través de la ecuación de la tangente, aplicando la expresión

$$y_1=y_0+hy'_0 \tag{4.96}$$

En general, el valor de $y_n$ se obtiene a partir de $y_{n-1}$ calculando la derivada

$$y'_{n-1}=f(y_{n-1}, t_{n-1}) \tag{4.97}$$

y aplicando

$$y_n=y_{n-1}+hy'_{n-1} \tag{4.98}$$

ecuación que expresa la fórmula de integración «forward Euler», en la que el valor de $y(t)$ al final de un intervalo se obtiene a partir de los valores de la función y de su derivada en el punto inicial del mismo.

Otra forma de calcular $y_n$ es a partir de la derivada en $t_n$, a través de la expresión

$$y_n=y_{n-1}+hy'_n \tag{4.99}$$

llamada «backward Euler» en la que se utiliza la derivada de la función en el punto en que se está calculando su valor.

Una variante ampliamente utilizada consiste en aplicar la relación

$$y_n=y_{n-1}+\frac{h}{2}(y'_n+y'_{n-1}) \tag{4.100}$$

que recibe el nombre de trapezoidal, en la que se utiliza el valor medio de la derivada en los extremos del intervalo.

A la fórmula de integración «forward Euler» se la califica de explícita ya que para el cálculo de $y_n$ se precisan parámetros ya obtenidos anteriormente, mientras que tanto la «backward Euler» como la trapezoidal reciben el nombre de implícitas en el sentido que $y_n$ depende del valor de $y'_n$, que no puede ser calculado antes de haber determinado $y_n$ o haber hecho una estimación de su valor.

Esta dificultad puede salvarse haciendo una predicción de $y_n$ con la fórmula «forward Euler» corrigiendo posteriormente su valor con la «backward Euler» o la trapezoidal. Esto justifica que el primer método reciba el nombre de predictor, mientras que a los segundos se les llame correctores.

Para la integración «backward Euler» un algoritmo que utiliza la fórmula «forward Euler» como predictor incluye los siguientes pasos:

1. Condiciones iniciales: $(y_0, t_0)$
2. Cálculo de $y'_0$ según

$$y'_0=f(y_0, t_0) \tag{4.101}$$

3. Aplicación del predictor al cálculo de $(y_1)^p$, donde el superíndice $p$ indica que se trata de una predicción o estimación.

$$(y_1)^p = y_0 + hy'_0 \tag{4.102}$$

4. Corrección del valor obtenido con el predictor
4.1 Predicción para $(y'_1)^p$

$$(y'_1)^p = f((y_1)^p, t_1) \tag{4.103}$$

4.2*a* Cálculo de $y_1$ por aplicación de la fórmula «backward Euler»

$$y_1 = y_0 + h(y'_1)^p \tag{4.104}$$

El valor obtenido para $y_1$ es el punto de partida para la determinación de $y_2$. La aplicación repetida del algoritmo permite el cálculo de $y_n$, para cualquier valor de $n$. a partir de $y_{n-1}$.

Una forma similar tiene el algoritmo para la aplicación de la fórmula trapezoidal en el que el paso 4.2*a* es sustituido por:
4.2*b* Cálculo de $y_1$ por aplicación de la fórmula trapezoidal

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}(y'_0 + (y'_1)^p) \tag{4.105}$$

La solución de un caso particular por los tres métodos descritos puede ayudar a su comprensión.

*Ejemplo 4.11* Resolver la ecuación diferencial

$$y' = -y + t$$

con $y(0) = 0$, aplicando la fórmula de integración «forward Euler», para $h = 0,1$.
La solución exacta es

$$y(t) = e^{-t} + t - 1$$

expresión que permitirá la determinación de los errores cometidos al resolverla por métodos numéricos

Partiendo de la condición inicial

$$t_0 = 0 \; ; \; y_0 = 0$$

se obtiene

$$y'_0 = -y_0 + t_0 = 0$$

Para $t=0{,}1$ el valor de la función y de su derivada es

$$y_1=y_0+hy'_0=0\ ;\ y'_1=-y_1+t_1=0{,}1$$

Siguiendo el proceso se calcula

$$t=0{,}2\ ;\ y_2=y_1+hy'_1=0{,}01\quad ;\ y'_2=-y_2+t_2=0{,}19$$

$$t=0{,}3\ ;\ y_3=y_2+hy'_2=0{,}029\ ;\ y'_3=-y_3+t_3=0{,}271$$

En la tabla 4.1 figuran para distintos valores de la variable $t$ los resultados de aplicar el método numérico $y_n$, el valor exacto $y(t_0+nh)$ y el error relativo definido como

$$\varepsilon_n=\frac{y_n-y(t_0+nh)}{y(t_0+nh)}=\frac{y_n-y(nh)}{y(nh)}$$

Tabla 4.1 Aplicación de la fórmula «forward Euler».

| $t_n$ | $y_n$ | $y(t_n)$ | $\varepsilon_n$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0,0 | 0,0 | 0 |
| 0,1 | 0,0 | 0,004837 | −1 |
| 0,2 | 0,01 | 0,018731 | −0,466 |
| 0,3 | 0,029 | 0,040818 | −0,289 |
| 0,4 | 0,056 | 0,073200 | −0,202 |
| 0,5 | 0,09049 | 0,106531 | −0,150 |
| 1,0 | 0,343878 | 0,367879 | −0,052 |
| 2,0 | 1,121577 | 1,135335 | −0,012 |
| 3,0 | 2,042391 | 2,049786 | −0,003 |
| 4,0 | 3,014780 | 3,018314 | −0,0017 |

Aunque la tabla 4.1 no incluye todos los valores de $t_n$, el intervalo de integración se ha mantenido constante en todo el proceso de cálculo. Puede observarse que el error disminuye de forma muy considerable al aumentar la variable $t$. Esto es debido a que al sustituir en todo un intervalo la curva por su tangente al inicio del mismo, las desviaciones son tanto mas importantes cuanto mayor es el valor de la segunda derivada. En este ejemplo se cumple que

$$y''(t)=e^{-t}$$

función monótonamente decreciente, lo que explica que para valores de $t$ próximos al origen los errores sean grandes. Estos aspectos se justificarán de manera más rigurosa en el siguiente apartado.

*Ejemplo 4.12* Aplicar la fórmula de integración «backward Euler», utilizando la de «forward Euler» como predictor, a la solución de la ecuación diferencial planteada en el ejemplo anterior.

Como antes, se parte de las condiciones iniciales $t_0=0$, $y_0=0$, para hacer una estimación de $y_1$ y de su derivada en $t=0{,}1$

$$(y_1)^p = y_0 + hy'_0 = 0$$
$$(y'_1)^p = (-y_1)^p + t_1 = 0{,}1$$

valores que sustituidos en la fórmula de integración «backward Euler» dan

$$y_1 = y_0 + h(y'_1)^p = 0{,}01$$
$$y'_1 = -y_1 + t_1 = -0{,}01 + 0{,}1 = 0{,}09$$

Repitiendo el proceso para $t_2=0{,}2$ resulta

$$(y_2)^p = y_1 + hy'_1 = 0{,}01 + 0{,}1 \cdot 0{,}09 = 0{,}019$$
$$(y'_2)^p = (-y_2)^p + t_2 = -0{,}019 + 0{,}2 = 0{,}181$$

Tabla 4.2 Aplicación de la fórmula «backward Euler».

| $t_n$ | $y_n$ | $y(t_n)$ | $\varepsilon_n$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0,1 | 0,01 | 0,004837 | 1,067 |
| 0,2 | 0,0281 | 0,018731 | 0,500 |
| 0,3 | 0,053571 | 0,040818 | 0,312 |
| 0,4 | 0,085750 | 0,073200 | 0,219 |
| 0,5 | 0,124032 | 0,106531 | 0,164 |
| 1,0 | 0,389416 | 0,367879 | 0,058 |
| 2,0 | 1,151645 | 1,135335 | 0,014 |
| 3,0 | 2,059053 | 2,049786 | 0,004 |
| 4,0 | 3,022999 | 3,018314 | 0,0015 |

valores estimados que conducen a

$$y_2 = y_1 + h(y'_2)^p = 0{,}01 + 0{,}1 \cdot 0{,}181 = 0{,}0281$$

$$y'_2 = -y_2 + t_2 = -0{,}0281 + 0{,}2 = 0{,}1719$$

En la tabla 4.2 figuran los resultados obtenidos por aplicación de la fórmula «backward Euler», los exactos y el error relativo antes definido.

Un razonamiento similar al que se ha hecho para la fórmula de integración «forward Euler» explica que en este caso el error sea de signo contrario y con valores absolutos muy similares.

*Ejemplo 4.13* Aplicar la fórmula trapezoidal, con la «forward Euler» como predictor, a la solución de la ecuación diferencial del ejemplo 4.11.

Partiendo de las condiciones $t_0 = 0$ e $y_0 = 0$ se obtiene

$$y'_0 = -y_0 + t_0 = 0$$

valores que permiten hacer una estimación de $y_1$ a través de la fórmula «forward Euler», según

$$(y_1)^p = y_0 + hy'_0 = 0$$

y de $y'_1$

$$(y'_1)^p = (-y_1)^p + t_1 = 0{,}1$$

valores que sustituidos en la fórmula de integración trapezoidal dan lugar a

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\,(y'_0 + (y'_1)^p) = 0{,}005$$

$$y'_1 = -y_1 + t_1 = -0{,}005 + 0{,}1 = 0{,}095$$

Repitiendo el proceso para $t_2 = 0{,}2$ resulta

$$(y_2)^p = y_1 + hy'_1 = 0{,}005 + 0{,}1 \cdot 0{,}095 = 0{,}0145$$

$$(y'_2)^p = -y_2 + t_2 = -0{,}0145 + 0{,}2 = 0{,}1855$$

valores estimados que conducen a

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}\,(y'_1 + (y'_2)^p) = 0{,}005 + 0{,}05\,(0{,}095 + 0{,}1855) = 0{,}019025$$

Repitiendo el proceso se obtendrían los valores que figuran en la tabla 4.3.

Tabla 4.3 Aplicación de la fórmula trapezoidal.

| $t_n$ | $y_n$ | $y(t_n)$ | $\varepsilon_n$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0,1 | 0,005 | 0,004837 | 0,036 |
| 0,2 | 0,019025 | 0,018731 | 0,015 |
| 0,3 | 0,041217 | 0,040818 | 0,0097 |
| 0,4 | 0,070802 | 0,073200 | 0,0068 |
| 0,5 | 0,107076 | 0,106531 | 0,0051 |
| 1,0 | 0,368541 | 0,367879 | 0,0018 |
| 2,0 | 1,135823 | 1,135325 | 0,00043 |
| 3,0 | 2,050056 | 2,049786 | 0,00013 |
| 4,0 | 3,018447 | 3,018314 | 0,00004 |

Con respecto a los métodos anteriores se ha producido una reducción muy importante del error, especialmente en las proximidades de $t=0$.

*B) Orden de integración y errores de truncamiento*

Las fórmulas de integración definidas en el apartado anterior responden a la forma general

$$a_1 y_n = a_0 y_{n-1} + h\,(b_1 y'_n + b_0 y'_{n-1}) \tag{4.106}$$

En efecto, para la «forward Euler» cuya expresión es

$$y_n = y_{n-1} + h y'_{n-1} \tag{4.107}$$

los coeficientes son

$$a_0 = 1\ ;\ a_1 = 1\ ;\ b_0 = 1\ ;\ b_1 = 0 \tag{4.108}$$

mientras que para la «backward Euler», que viene dada por

$$y_n = y_{n-1} + h y'_n \tag{4.109}$$

sus valores son

$$a_0 = 1\ ;\ a_1 = 1\ ;\ b_0 = 0\ ;\ b_1 = 1 \tag{4.110}$$

y en el caso de la trapezoidal

$$y_n = y_{n-1} + \frac{h}{2}\,(y'_n + y'_{n-1}) \tag{4.111}$$

son iguales a

$$a_0 = 1 \ ; \ a_1 = 1 \ ; \ b_0 = 1/2 \ ; \ b_1 = 1/2 \tag{4.112}$$

El error asociado a su intervalo de integración de amplitud $h$ es

$$\varepsilon_n = y_n - y(t_n) \tag{4.113}$$

que puede expresarse como

$$\varepsilon_n = \frac{1}{a_1}\,[a_0 y_{n-1} + h\,(b_1 y'_n + b_0 y'_{n-1})] - y(t_n) \tag{4.114}$$

Si se pretende sólo determinar el error en este intervalo, es decir, se supone que el acumulado hasta su valor inicial es cero, se cumple que

$$\begin{aligned} y_{n-1} &= y(t_{n-1}) \\ y'_n &= y'(t_n) \\ y'_{n-1} &= y'(t_{n-1}) \end{aligned} \tag{4.115}$$

Desarrollando en serie de Taylor las funciones $y(t)$ e $y'(t)$ en el entorno de $t = t_{n-1}$ se obtiene

$$y(t_n) = y_{n-1} + h y'_{n-1} + \frac{h^2}{2}\, y''_{n-1} + \frac{h^3}{6}\, y'''_{n-1} + \dots \tag{4.116}$$

$$y'_n = y'(t_n) = y'_{n-1} + h y''_{n-1} + \frac{h^2}{2}\, y'''_{n-1} + \dots \tag{4.117}$$

expresiones que sustituidas en la (4.114) dan lugar a un valor del error igual a

$$\varepsilon_n = \frac{1}{a_1}\left[ a_0 y_{n-1} + h\,(b_1 y'_{n-1} + h b_1 y''_{n-1} + \frac{h^2}{2}\, b_1 y'''_{n-1} + \dots + b_0 y'_{n-1} \right] - \tag{4.118}$$

$$- \left( y_{n-1} + h y'_{n-1} + \frac{h^2}{2}\, y''_{n-1} + \frac{h^3}{6}\, y'''_{n-1} + \dots \right)$$

que puede escribirse como

$$\varepsilon_n=\frac{1}{a_1}\left[(a_0-a_1)y_{n-1}+(b_1+b_0-a_1)\,hy'_{n-1}+\right.$$
$$\left.+\left(b_1-\frac{a_1}{2}\right)h^2y''_{n-1}+\left(\frac{b_1}{2}-\frac{a_1}{6}\right)h^3y'''_{n-1}+\dots\right] \tag{4.119}$$

Para las tres fórmulas de integración presentadas se cumple que

$$\begin{aligned} a_0-a_1&=0\\ b_1+b_0-a_1&=0 \end{aligned} \tag{4.120}$$

En el caso de la «forward Euler» el coeficiente de $h^2y''_{n-1}$ es

$$b_1-\frac{a_1}{2}=-\frac{1}{2} \tag{4.121}$$

por lo que el término de mayor incidencia en el error es igual a

$$-\frac{1}{2}\,h^2y''_{n-1} \tag{4.122}$$

mientras que para la «backward Euler» es del mismo valor absoluto pero de signo positivo.

En la fórmula trapezoidal se cumple que

$$\begin{aligned} b_1-\frac{a_1}{2}&=0\\ \frac{b_1}{2}-\frac{a_1}{6}&=\frac{1}{12} \end{aligned} \tag{4.123}$$

por lo que en la expresión del error el primer término distinto de cero es

$$\frac{1}{12}\,h^3y''_{n-1} \tag{4.124}$$

lo que explica que con ella se obtengan valores más aproximados que utilizando la «forward Euler» y la «backward Euler».

Por otra parte, al anularse el término en $y''$ a la fórmula trapezoidal se la denomina de segundo orden frente a las otras dos que son de primero.

En esta introducción a los métodos numéricos de solución de ecuaciones diferenciales de primer orden se han omitido temas de tanto interés como la estabilidad de los algoritmos, la generación de fórmulas de integración de orden más elevado y el problema de la elección de la amplitud del intervalo de

integración, que pueden encontrarse en la literatura especializada y que rebasan los objetivos de este texto.

### 4.6.2 Aplicación a la respuesta temporal de circuitos analógicos

Al aplicar el Método Nodal Modificado o el de los dos grafos a un circuito resulta un sistema de ecuaciones de la forma

$$(s\underset{\sim}{C}+\underset{\sim}{G})\underline{x}=\underline{W} \tag{4.125}$$

que corresponde al sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\underset{\sim}{C}\dot{\underline{x}}+\underset{\sim}{G}\underline{x}=\underline{W} \tag{4.126}$$

y que puede escribirse de la forma

$$\underset{\sim}{C}\dot{\underline{x}}=-\underset{\sim}{G}\underline{x}+\underline{W} \tag{4.127}$$

Si para su solución se aplica la fórmula «backward Euler», multiplicada por $\underset{\sim}{C}$ resulta

$$\underset{\sim}{C}\underline{x}_{n+1}=\underset{\sim}{C}\underline{x}_n+h\underset{\sim}{C}\dot{\underline{x}}_{n+1} \tag{4.128}$$

en la que, sustituyendo $\underset{\sim}{C}\dot{\underline{x}}_{n+1}$ por su valor en el sistema de ecuaciones diferenciales, se transforma en

$$\underset{\sim}{C}\underline{x}_{n+1}=\underset{\sim}{C}\underline{x}_n+h(\underline{W}_{n+1}-\underset{\sim}{G}\underline{x}_{n+1}) \tag{4.129}$$

Reordenando términos resulta

$$(\underset{\sim}{C}+h\underset{\sim}{G})\,\underline{x}_{n+1}=\underset{\sim}{C}\underline{x}_n+h\underline{W}_{n+1} \tag{4.130}$$

sistema del que puede obtenerse $\underline{x}_{n+1}$ a partir de $\underline{x}$ y del vector excitación $\underline{W}$, dando lugar a un método iterativo de solución. Es interesante destacar que al ser la matriz $(\underset{\sim}{C}+h\underset{\sim}{G})$ constante, con una sola descomposición LU es suficiente para realizar todos los pasos del algoritmo.

Es fácil demostrar que el resultado de aplicar la fórmula trapezoidal es

$$\left(\underset{\sim}{C}+\frac{h}{2}\underset{\sim}{G}\right)\underline{x}_{n+1}=\left(\underset{\sim}{C}-\frac{h}{2}\underset{\sim}{G}\right)\underline{x}_n+\frac{h}{2}\left(\underline{W}_{n+1}+\underline{W}_n\right) \tag{4.131}$$

ecuación que tiene las mismas propiedades que el anterior.

*Ejemplo 4.14* En el ejemplo 2.4. se ha presentado un circuito que tiene interés en el análisis del oscilador Colpitts. Como allí se describió con detalle, a partir del denominador de las funciones de red que en él pueden definirse se

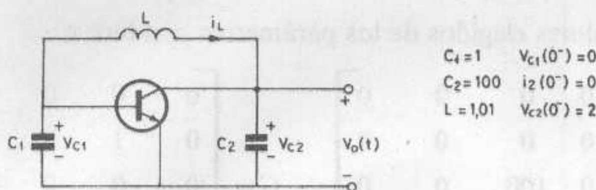



Figura 4.8 Oscilador Colpitts.

obtienen la condición y la frecuencia de oscilación en función de los valores de los elementos y de los parámetros del modelo del transistor. Se trata ahora de determinar la respuesta temporal con excitación nula y condiciones iniciales distintas de cero, que permiten simular el proceso de autoarranque que en la realidad se produce por un pequeño estímulo inicial cuyo origen puede ser el ruido siempre presente en el circuito.

En concreto, se trata de determinar la respuesta $v_0(t)$ en el circuito representado en la figura 4.8 utilizando para el transistor el modelo de pequeña señal que se ilustra en la figura 4.9. El circuito transformado se representa en la figura 4.10.

Aplicando el Método Nodal Modificado se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} C_1 s & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & g_i & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & C_2 s & -1 & \beta \\ 1 & 0 & -1 & -Ls & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_0 \\ I_L \\ I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C_2 V_{c2}(0^-) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

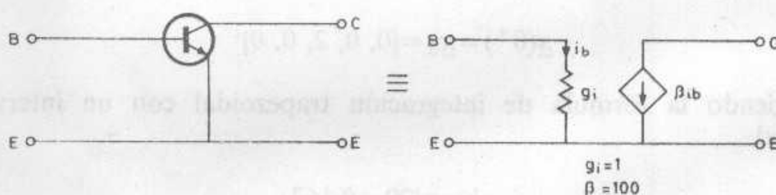



Figura 4.9 Modelo de pequeña señal del transistor.

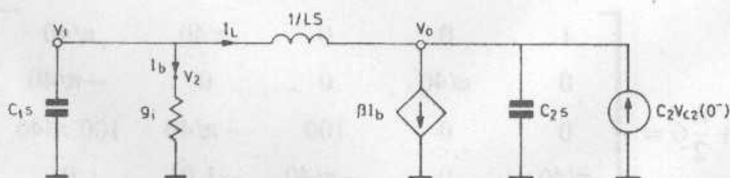



Figura 4.10 Circuito transformado.

que para los valores elegidos de los parámetros conduce a

$$\underset{\sim}{C}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1{,}01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \underset{\sim}{G}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 100 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones diferenciales del circuito, que es de la forma

$$\underset{\sim}{C}\dot{\underline{x}}=-\underset{\sim}{G}\underline{x}+\underline{W}$$

rige su comportamiento para $t>0$, por lo que, cualquiera que sea la fórmula de integración que se utilice, el algoritmo para su solución debe partir del valor del vector $\underline{x}$ en $t=0^+$. Su determinación se hace, en todos los casos, tomando como datos las tensiones en los condensadores y las corrientes en los inductores $0^-$, y aplicando las leyes de interconexión. Para el circuito que se está analizando se cumple que

$$v_1(0^+)=v_{c1}(0^+)=v_{c1}(0^-)=0$$
$$v_2(0^+)=v_{c1}(0^+)=v_{c1}(0^-)=0$$
$$v_0(0^+)=v_{c2}(0^+)=v_{c2}(0^-)=2$$
$$i_L(0^+)=i_L(0^-)=0$$
$$i_b(0^+)=g_i v_2(0^+)=0$$

siendo

$$\underline{x}(0^+)=\underline{x}_0=[0,\ 0,\ 2,\ 0,\ 0]^t$$

Eligiendo la fórmula de integración trapezoidal con un intervalo de amplitud

$$h=\pi/20=0{,}157$$

resulta

$$\underset{\sim}{C}+\frac{h}{2}\underset{\sim}{G}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \pi/40 & \pi/40 \\ 0 & \pi/40 & 0 & 0 & -\pi/40 \\ 0 & 0 & 100 & -\pi/40 & 100\ \pi/40 \\ \pi/40 & 0 & -\pi/40 & -1{,}01 & 0 \\ \pi/40 & -\pi/40 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{C} - \frac{h}{2}\underset{\sim}{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\pi/40 & -\pi/40 \\ 0 & -\pi/40 & 0 & 0 & \pi/40 \\ 0 & 0 & 100 & \pi/40 & -100\,\pi/40 \\ -\pi/40 & 0 & \pi/40 & -1{,}01 & 0 \\ -\pi/40 & \pi/40 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Además el vector $\underline{w}$ es nulo al no estar el circuito excitado, por lo que se cumple que

$$\frac{h}{2}\,[\,\underline{w}_{n+1} + \underline{w}_n] = 0$$

Resolviendo el sistema expresado en (4.131), lo que exige aplicar una sola vez el algoritmo de descomposición LU a la matriz constante $\underset{\sim}{C} + h/2\underset{\sim}{G}$, y calculando el error relativo para los valores exactos de $v_0(t)$, determinados a través del análisis manual, se obtienen los resultados que se resumen en la tabla 4.4. En ella puede observarse la elevada precisión que se consigue con la fórmula de integración trapezoidal y el carácter oscilante de la respuesta $v_0(t)$ que, una vez transcurrido suficiente tiempo para que sean poco importantes los efectos de la componente exponencial asociada al polo real del circuito, prácticamente repite sus valores con una periodicidad de $2\pi$ segundos.

Tabla 4.4 Aplicación de la fórmula trapezoidal al análisis de un circuito oscilante.

| $t_n$ | $(v_0)_n$ | $v_0(nh)$ | $\varepsilon_n$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 2 | 0 |
| 0,1571 | 1,997988 | 1,998553 | $-2{,}694\cdot10^{-4}$ |
| 0,3142 | 1,988723 | 1,989598 | $-4{,}396\cdot10^{-4}$ |
| 0,4713 | 1,966349 | 1,967364 | $-5{,}138\cdot10^{-4}$ |
| 0,6284 | 1,926223 | 1,927172 | $-4{,}943\cdot10^{-4}$ |
| 0,7855 | 1,864879 | 1,865593 | $-3{,}808\cdot10^{-4}$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 10,2115 | −1,414177 | −1,414158 | $1{,}365\cdot10^{-5}$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 13,3534 | 1,414104 | 1,414189 | $-5{,}985\cdot10^{-5}$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 16,4955 | −1,413941 | −1,414118 | $-1{,}691\cdot10^{-4}$ |

# Capítulo 5
# Características del programa ARIADNA

## 5.1 INTRODUCCION

En el campo de la simulación de circuitos analógicos existen gran número de programas que permiten el tratamiento de circuitos lineales y no lineales, incorporan modelos muy elaborados de los dispositivos activos y tienen capacidad para el análisis DC, AC y en régimen transitorio, además de dar otras prestaciones, como pueden ser el cálculo de sensibilidades a pequeñas y grandes variaciones de los parámetros, análisis de fallos y estudio de los efectos de las tolerancias de los componentes por aplicación de métodos estadísticos. Estos programas, si bien son generales, tienen un elevado coste y son de difícil acceso para los profesionales que desarrollan su actividad en el campo del diseño de circuitos electrónicos de complejidad media, existiendo una separación excesiva entre coste y prestaciones por un lado y necesidades a cubrir, por el otro.

El desarrollo de los ordenadores personales (PC), proceso en el que se están dando simultáneamente importantes reducciones de precio y elevados aumentos de capacidad, ha facilitado la realización de programas de menor coste, con prestaciones más reducidas, pero acorde con las necesidades antes citadas.

Sin embargo, la mayor parte de ellos, cuyo objetivo es la determinación de la respuesta frecuencial de circuitos analógicos lineales, presentan fuertes restricciones en cuanto al tipo de elementos que pueden tratar, a la complejidad de los modelos de los dispositivos activos que incorporan y al tiempo de ejecución. Estos factores tienen la suficiente importancia como para que de su campo de aplicación queden excluidos circuitos de gran interés práctico.

El origen de estas limitaciones es doble. Por una parte, con el Método Nodal sólo pueden formularse directamente las ecuaciones para circuitos con elementos definidos por su admitancia o transconductancia (resistores, inductores, condensadores y fuentes de corriente controladas por tensión) y

excitaciones modeladas con fuentes independientes de corriente, quedando excluidos elementos de tanto interés como las fuentes de tensión independientes o controladas y los amplificadores operacionales. El Método Nodal puede ampliarse para incorporar el modelo ideal del amplificador operacional, aunque con él no es posible estudiar aspectos importantes como son los efectos del valor finito del producto ganancia-ancho de banda y que pueden determinar, incluso, la inestabilidad de un circuito.

Además, este tipo de programas no incorporan la determinación de la función de red, obteniéndose la respuesta frecuencial por solución repetida del sistema de ecuaciones del circuito, para cada valor de la frecuencia. Parece obvio, que frente a programas que obtienen la función de transferencia y la aplican a la determinación de la respuesta frecuencial, el tiempo de ejecución será innecesariamente elevado.

Consecuencia de lo anterior, es que se abren dos líneas para la mejora sustancial de los programas de simulación:

1. Aplicación de métodos generales en la formulación automática de las ecuaciones
2. Determinación de la función de transferencia como paso previo a la obtención de la respuesta frecuencial.

El programa, cuyas características se presentan en este capítulo, se ha elaborado atendiendo a estos criterios. Por una parte, se aplica el Método Nodal Modificado al planteamiento de las ecuaciones de los circuitos analógicos, lo que permite el tratamiento de todo tipo de elementos y, por otra, obtiene los coeficientes de los polinomios numerador y denominador de la función de transferencia, previa estimación por el usuario del orden del circuito. Este último aspecto confiere al programa el carácter de semisimbólico, a la vez que implica una importante reducción del tiempo de ejecución, frente a programas basados en la solución, para cada valor de la frecuencia, del sistema de ecuaciones. El Método Nodal Modificado se ha descrito en el capítulo 2 y los métodos numéricos, que se aplican para la solución de los sistemas de ecuaciones y para la determinación de la función de transferencia por interpolación de los valores de los polinomios, han sido expuestos en el capítulo 4.

El programa incluye, además, el análisis frecuencial de circuitos de condensadores conmutados, aplicándose en el planteamiento de las ecuaciones el Método Nodal por Equilibrio de Carga, presentado en el capítulo 3.

## 5.2 ESTRUCTURA

El programa está dividido en tres bloques principales, que intercambian información a través de ficheros secuenciales.

En la figura 5.1 se presenta un esquema generalizado de la estructura de dicho programa y la interconexión de sus bloques a través de los ficheros. La función de cada uno de estos bloques corresponde a

1. Descripción del circuito y cálculo de la matriz del sistema.
2. Obtención de la función de transferencia
3. Cálculo y representación gráfica de la respuesta frecuencial.

Los datos correspondientes a la descripción del circuito, que incluyen para cada elemento su identificación, tipo, nodos a los que está conectado y valor de sus parámetros, son introducidos utilizando el primer bloque y se graban en un fichero tipo texto. Para los circuitos de condensadores conmutados la descripción topológica debe hacerse para cada una de las fases.

Antes de proceder a cualquier tipo de cálculo, existe la posibilidad de listar los ficheros anteriormente creados y modificarlos en caso de posibles errores. Por otro lado, también es posible listar o modificar un fichero tipo texto que se hubiera creado con anterioridad.

A partir de los datos contenidos en estos ficheros se obtiene la matriz del sistema y uno o dos vectores de términos independientes, para circuitos analógicos o de condensadores conmutados, respectivamente. Tanto en un caso como en el otro, los elementos de la matriz del sistema son de primer grado, en $s$ o $z$, por lo que puede descomponerse en suma de dos, según las expresiones

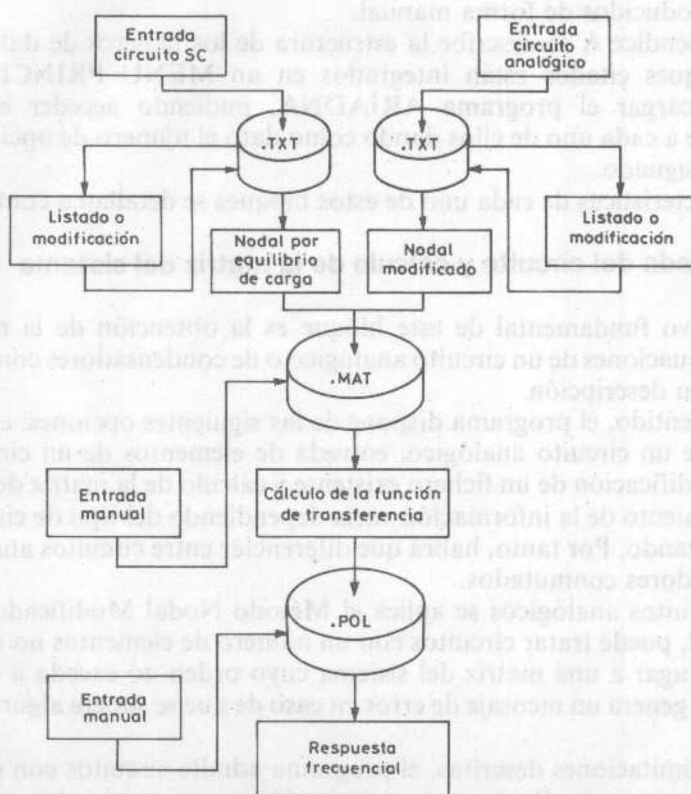



Figura 5.1 Estructura del programa.

$$\underset{\sim}{T} = s\underset{\sim}{C} + \underset{\sim}{G} \quad (5.1a)$$

$$\underset{\sim}{C}' = z\underset{\sim}{C}_1 + \underset{\sim}{C}_2 \quad (5.1b)$$

Los elementos de las matrices $\underset{\sim}{G}$, $\underset{\sim}{C}$, $\underset{\sim}{C}_1$ y $\underset{\sim}{C}_2$, y de los vectores del término independiente se graban en un fichero con la extensión MAT.

El segundo bloque, que requiere como datos los contenidos en un fichero MAT, permite la entrada manual y la modificación de las matrices de un sistema de ecuaciones. Su objetivo es la determinación de la función de red en $s$ o de transferencia en $z$ de circuitos analógicos o de condensadores conmutados, respectivamente, incluyendo algoritmos para la descomposición triangular o LU de matrices cuadradas, solución de sistemas de ecuaciones algebraicas y lineales e interpolación compleja. Los coeficientes de los polinomios numerador y denominador de $H(s)$ o $H(z)$ se graban en un fichero con la extensión POL.

Este bloque también da la posibilidad de calcular los ceros y polos de la función de transferencia obtenida o simplemente calcular las raíces de un polinomio que se introduzca manualmente.

Por último, el tercer bloque obtiene la respuesta frecuencial del circuito, a la que da una expresión tabular o gráfica, a partir de los datos de un fichero POL, o de los introducidos de forma manual.

En el Apéndice A se describe la estructura de los ficheros de datos.

Los bloques citados están integrados en un MENU PRINCIPAL que aparece al cargar el programa ARIADNA, pudiendo acceder el usuario directamente a cada uno de ellos dando como dato el número de opción que en él se le ha asignado.

Las características de cada uno de estos bloques se detallan a continuación.

### 5.2.1 Entrada del circuito y cálculo de la matriz del sistema

El objetivo fundamental de este bloque es la obtención de la matriz del sistema de ecuaciones de un circuito analógico o de condensadores conmutados, a partir de su descripción.

En este sentido, el programa dispone de las siguientes opciones: entrada de elementos de un circuito analógico, entrada de elementos de un circuito SC, listado o modificación de un fichero existente y cálculo de la matriz del sistema.

El tratamiento de la información varía dependiendo del tipo de circuito que se esté analizando. Por tanto, habrá que diferenciar entre circuitos analógicos y de condensadores conmutados.

Para circuitos analógicos se aplica el Método Nodal Modificado y, en su forma actual, puede tratar circuitos con un número de elementos no superior a 50 que den lugar a una matriz del sistema cuyo orden no exceda a 40. En su ejecución, se genera un mensaje de error en caso de que se supere alguna de estas cotas.

Con las limitaciones descritas, el programa admite circuitos con elementos de los siguientes tipos: Resistor, caracterizado por sus parámetros resistencia (R) o Conductancia (G), Condensador (C), Inductor (L), Acoplamiento

magnético (M), Fuente independiente de tensión (E), Fuente independiente de corriente (J), Transductor tensión-corriente o fuente de corriente controlada por tensión (TVC), Transductor tensión-tensión o fuente de tensión controlada por tensión (TVV), Transductor corriente-corriente o fuente de corriente controlada por corriente (TCC), Transductor corriente-tensión o fuente de tensión controlada por corriente (TCV), Amplificador operacional (O), Transistor bipolar (Q) y Transistor de efecto de campo o FET (QF).

Para cada tipo de elemento se ha indicado el código de identificación que deberá usarse en la denominación de cada elemento del circuito.

El programa trata los resistores de resistencia $R$ a través de su parámetro conductancia de valor $G = 1/R$, excepto en el caso de resistencia nula, en el que formula una ecuación adicional que consiste en la igualdad de las tensiones de sus nodos, lo que permite la determinación de corrientes de cortocircuito.

El inductor se define por el valor de su impedancia *Ls* planteándose una ecuación adicional y definiéndose su intensidad como variable adicional.

Para el amplificador operacional puede utilizarse el modelo ideal, caracterizado por su amplificación infinita, o un modelo más exacto, definido por la amplificación en continua $A_0$, expresada en decibelios y el producto ganancia-ancho de banda en hercios.

En cuanto al transistor bipolar el programa incorpora dos modelos de pequeña señal. El primero de ellos se representa en la figura 5.2*b*, donde la fuente de corriente controlada por corriente de valor β que aparece en la figura 5.2*a*, se ha sustituido por otra controlada por la tensión base-emisor, de valor $g = \beta/r_i$, para evitar la formulación de una ecuación adicional.

El dato de la resistencia de colector se introduce como una conductancia $g_0$, para que en caso de que su valor sea nulo el programa, sin alteración alguna, pueda trabajar con el modelo más simple representado en la figura 5.3.

El segundo modelo, más complejo pero de mayor exactitud, presenta una configuración que implica la definición de un nuevo nodo e incluye tres

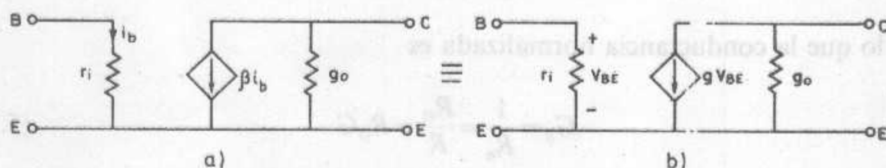



Figura 5.2 Modelo elemental de pequeña señal del transistor bipolar.

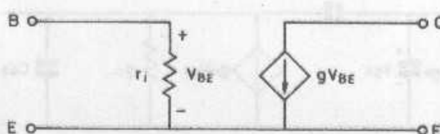



Figura 5.3 Modelo simplificado de pequeña señal del transistor bipolar.

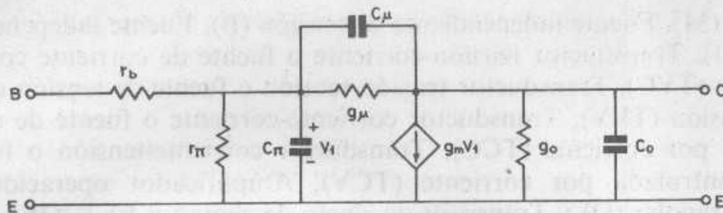



Figura 5.4 Modelo de pequeña señal del transistor bipolar.

condensadores, que hacen aumentar el orden del circuito. En la figura 5.4 se representa dicho modelo.

También en este caso se introducen los datos como resistencias o conductancias para que las simplificaciones en el modelo se puedan hacer asignando valores nulos a algunos de los parámetros. En caso de que $r_b$ valga cero no se genera el nodo adicional.

Por último, el modelo de pequeña señal del FET es el representado en la figura 5.5.

El programa incluye la posibilidad de normalizar los parámetros del circuito analógico, introduciendo valores de la resistencia de normalización y del factor de normalización frecuencial, $R_0$ y $\omega_0$ respectivamente. Este aspecto es fundamental para evitar rebasamientos de los límites superior e inferior de las magnitudes que pueden tratarse en el ordenador y para conseguir resultados de precisión.

Los valores normalizados de cualquier parámetro con dimensiones de resistencia o de frecuencia son iguales a su cociente por $R_0$ y $\omega_0$, respectivamente.

En cuanto a las conductancias, se cumple que

$$G=1/R \tag{5.2}$$

por lo que la conductancia normalizada es

$$G_n=\frac{1}{R_n}=\frac{R_0}{R}=R_0G \tag{5.3}$$

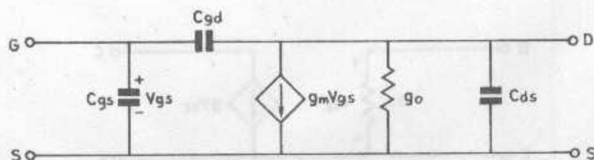



Figura 5.5 Modelo de pequeña señal del transistor de efecto de campo (FET).

de donde se obtiene que el parámetro de normalización $G_0$ es

$$G_0=\frac{G}{G_n}=\frac{1}{R_0} \tag{5.4}$$

igual al inverso del valor de $R_0$.

Para las inductancias hay que tener en cuenta que su producto por la frecuencia tiene dimensiones de resistencia, pudiéndose escribir la relación

$$L\omega=R \tag{5.5}$$

que deben cumplir también los valores normalizados, según la ecuación

$$L_n\omega_n=R_n \tag{5.6}$$

Sustituyendo estos valores por los iniciales, se obtiene

$$\frac{L}{L_0}\frac{\omega}{\omega_0}=\frac{R}{R_0} \tag{5.7}$$

de donde

$$L_0\omega_0=R_0 \tag{5.8}$$

y

$$L_0=\frac{R_0}{\omega_0} \tag{5.9}$$

En conclusión, el factor de normalización de los parámetros con dimensiones de inductancia es igual al cociente entre $R_0$ y $\omega_0$.

En el caso de los condensadores el producto de la capacidad por la frecuencia tiene dimensiones de admitancia, lo que permite escribir

$$C\omega=G \tag{5.10}$$

relación que también deben cumplir los valores normalizados

$$C_n\omega_n=G_n \tag{5.11}$$

ecuación que puede expresarse por

$$\frac{C}{C_0}\frac{\omega}{\omega_0}=R_0G \tag{5.12}$$

de donde se obtiene

$$\frac{1}{C_0\omega_0} = R_0 \quad ; \quad C_0 = \frac{1}{R_0\omega_0} \qquad (5.13)$$

El factor de normalización de la capacidad es igual a la inversa del producto de los parámetros $R_0$ y $\omega_0$.

En la tabla 5.1 se presenta para cada tipo de elemento el factor de normalización y el valor normalizado.

Tabla 5.1 Normalización de elementos.

| *Elemento* | *Parámetro de normalización* | *Valores normalizados* |
|---|---|---|
| Conductancia | $1/R_0$ | $G_n = R_0 G$ |
| Resistor | $R_0$ | $R_n = R/R_0$ |
| Condensador | $1/R_0\omega_0$ | $C_n = R_0\omega_0 C$ |
| Inductor | $R_0/\omega_0$ | $L_n = L\omega_0/R_0$ |
| Acoplamiento magnético | $R_0/\omega_0$ | $M_n = M\omega_0/R_0$ |
| Fuentes Independientes | 1 | $E, J$ |
| Transductor tensión-corriente | $1/R_0$ | $g_n = R_0 g$ |
| Transductor tensión-tensión | 1 | $\mu_n = \mu$ |
| Transductor corriente-corriente | 1 | $\alpha_n = \alpha$ |
| Transductor corriente-tensión | $R_0$ | $r_n = r/R_0$ |
| Amplificador operacional | 1 ; $\omega_0$ | $A_0$ ; $GB/\omega_0$ |

A la matriz del sistema se incorporan, de forma automática, los valores normalizados de los elementos.

Una alternativa a la normalización de parámetros es la utilización de sistemas coherentes de unidades.

La matriz resultante se graba en un fichero de nombre igual al que se había fijado para la descripción del circuito y extensión .MAT («nombre del fichero».MAT).

En cuanto a circuitos de condensadores conmutados se ha utilizado el Método Nodal por Equilibrio de Carga para la obtención de la matriz del sistema. El número de condensadores, en este caso, no debe exceder de 50 y el de amplificadores operacionales no será superior a 20.

Las capacidades de los condensadores deberán introducirse convenientemente normalizadas para evitar posibles desbordamientos.

El programa trata únicamente los circuitos de condensadores conmutados de mayor interés práctico, que son aquellos cuyos nodos corresponden al de

entrada del circuito y a los de entrada inversora y salida de los amplificadores operacionales, para los que se utilizará el modelo ideal.

### 5.2.2 Obtención de la función de transferencia

El objetivo fundamental de este bloque es la obtención de la función de red $H(s)$ de circuitos analógicos o de la de transferencia $H(z)$ en los de condensadores conmutados a partir de la matriz del sistema y del vector o vectores del término independiente.

Para ello, además de la entrada automática a través de un fichero MAT, se dispone de las opciones de entrada manual de la matriz del sistema, modificación o listado de la misma, cálculo de la función de transferencia y obtención de las raíces de un polinomio.

Si la matriz se introduce de forma manual su orden no debe exceder en ningún caso de 40. Además, se debe entrar como dato el término independiente del sistema de ecuaciones que constará de uno o dos vectores según se trate de un circuito analógico o uno SC.

Para la obtención de la función de transferencia habrá que especificar la variable de salida del circuito.

En los circuitos analógicos esta variable coincide con una tensión nodal o con una de las que generan los elementos que precisan la formulación de una ecuación adicional. En la ejecución del programa aparece en pantalla una relación de estos elementos en la que a cada uno de ellos se le asigna un número que coincide con el de la variable adicional a que da lugar.

En el caso de circuitos de condensadores conmutados el número de la variable de salida coincide con el del amplificador operacional donde está definida. Para estos circuitos, la función de transferencia coincide con una de las parciales o puede obtenerse a partir de ellas. El programa la calcula automáticamente aplicando una de las expresiones $H_{ix}$, $H_{ix}+H_{iy}$, $H_{ix}+zH_{iy}$, $H_{ix}+(1/z)H_{iy}$, después de que el usuario, además de los parámetros $i$, $x$ o $y$, elija la más adecuada al circuito que está analizando.

En la determinación de la función de red o de transferencia el usuario debe aportar como dato el orden estimado del circuito. En el caso de los analógicos su valor es como máximo igual al número de condensadores e inductores del circuito, al que habrá que añadir el de AO modelados con una función de transferencia con un polo real. Para los de condensadores conmutados, el orden del circuito coincide con el número de AO que incluye. La estimación debe hacerse con rigor, ya que en caso de optar por un número inferior al orden real los resultados obtenidos, tanto de las funciones de red como de la respuesta frecuencial, serán erróneos, por lo que, ante cualquier duda, se recomienda que la estimación se haga por exceso, pero sin sobrepasar el máximo de 40.

Aun en el caso de que el orden estimado sea el adecuado, puede suceder que algún punto de interpolación coincida con un polo de la función de red con lo que para ese valor la matriz es singular. Este problema lo resuelve el programa aumentando el orden de forma automática. Si a pesar de ello persiste la singularidad de la matriz, el sistema se considera no resoluble.

### 5.2.3 Cálculo y representación gráfica de la respuesta frecuencial

Este bloque calcula y representa la respuesta en frecuencia de una función de transferencia, que puede provenir de un fichero de datos o ser entrada de forma manual. En cualquier caso, el grado de los polinomios no deberá exceder de 40.

Los resultados se presentan en forma de tabla o de manera gráfica, según se pretenda obtener valores exactos de la respuesta a determinadas frecuencias o la caracterización de la respuesta frecuencial en una banda más amplia.

En cuanto a las tablas, no existe limitación del número de puntos a calcular y en este formato la respuesta viene representada a través del módulo, argumento, parte real e imaginaria de la función de transferencia en dichos puntos.

En modo gráfico, existe la posibilidad de trabajar en baja, media o alta resolución, lo que equivale a obtener 50, 166 o 500 puntos de la respuesta frecuencial, correspondiente a la función de transferencia que se esté considerando, para un intervalo que previamente se habrá establecido, representando la curva de módulo o de argumento, según indicación del usuario. En ambos casos, el eje de abscisas se podrá escalar de forma lineal o logarítmica, según convenga en la representación, teniendo en cuenta que en el caso de circuitos analógicos este eje representará la pulsación ($\omega$) en radianes o la frecuencia ($f$) en hercios, mientras que para circuitos de condensadores conmutados se referirá a la frecuencia discreta en grados.

En la gráfica del módulo se puede optar por un escalado lineal o logarítmico del eje de ordenadas, correspondiendo la representación a la amplificación o a la ganancia, respectivamente.

Por otra parte, es posible también incidir sobre todos los parámetros de la retícula, en la que se representará la curva, con objeto de obtener una representación acorde con las necesidades del problema.

Finalmente, cabe destacar que en una misma retícula se podrán representar hasta seis curvas, de un mismo tipo y en un mismo intervalo, correspondientes a funciones de transferencia diferentes.

*Capítulo 6*

# *Manual de utilización del programa ARIADNA*

En este capítulo se presenta el manual de utilización del programa ARIADNA para la determinación de la respuesta frecuencial de circuitos analógicos y de condensadores conmutados, que se caracteriza por obtener como paso previo la funcion de red o de transferencia.

Para la ejecución del programa es necesario disponer de un ordenador personal (PC) compatible, con una memoria de usuario de 150 Kb como mínimo y una o dos unidades de disco de 360 Kb.

## 6.1 PUESTA EN MARCHA

En primer lugar se ha de cargar el sistema operativo y las utilidades necesarias para tener el PC preparado para trabajar.

Para acceder al MENU PRINCIPAL, que es el que contiene los tres grandes bloques que componen el programa, se escribe la palabra ARIADNA y se pulsa RETURN[1].

A>ARIADNA

apareciendo en pantalla el nombre del programa y, pulsando una tecla, el Menú Principal

[1] La tecla RETURN deberá pulsarse siempre después de cada introducción de datos para que éstos sean validados. Por ello, se obviará esta acción de aquí en adelante.

PROGRAMA ARIADNA DE ANALISIS DE CIRCUITOS

MENU PRINCIPAL

1. Entrada de datos del circuito. Cálculo del sistema de ecuaciones.
2. Obtención de la función de transferencia.
3. Cálculo y representación gráfica de la respuesta frecuencial.

Entra el número de opción

A >

Tecleando el número de opción deseada se accede directamente al bloque elegido.

## 6.2 ENTRADA DE DATOS DEL CIRCUITO. CALCULO DEL SISTEMA DE ECUACIONES

Al seleccionar esta opción aparece en pantalla el MENU 1, correspondiente a

1: Entrada de datos de un circuito analógico
2: Entrada de datos de un circuito SC
3: Listado o Modificación de un fichero existente
4: Cálculo de la matriz del sistema
5: Fin de la ejecución

OPCION?

Cada opción realiza las funciones que a continuación se detallan.

### 6.2.1 Entrada de datos de un circuito analógico

El objetivo de este punto es la creación de un fichero de datos, con la extensión TXT, en el que se almacena la descripción del circuito que se pretende analizar.

Para la creación de este fichero habrá que introducir los elementos, a medida que el programa los vaya requiriendo, en la forma siguiente

Elemento?

| | | | |
|---|---|---|---|
| R... | — Resistencia | G... | — Conductancia |
| C... | — Condensador | L... | — Inductor |
| E... | — Fuente de tensión | J... | — Fuente de Corriente |
| O... | — Ampl. Operacional | Q... | — Transistor bipolar |
| M... | — Acopl. magnético | QF... | — Transistor FET |
| TVC... | — Trans. tensión-corriente | | |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

* — Fin Introducción Elementos

El nombre que se asigne a cada uno de los elementos debe empezar por el código de identificación de su tipo, seguido, sin espacios en blanco, por una serie alfanumérica de caracteres. Hay que tener en cuenta que en dicha serie no debe existir ningún espacio de separación, pues de otra forma, todos los caracteres que se encuentren después de dicho espaciado no serán considerados como denominación del elemento, dando lugar a errores posteriores de interpretación del fichero.

| | | | |
|---|---|---|---|
| R12 | denominación VALIDA | R 12 | denominación NO VALIDA |
| Ci1 | ,, ,, | Ci 1 | ,, ,, |
| OpAmp1 | ,, ,, | OpAmp 1 | ,, ,, |

La denominación del transistor bipolar varía dependiendo del tipo de modelo escogido y, aunque el usuario sólo debe introducir el código de identificación Q, seguido de los caracteres que desee, el programa insertará en dicha denominación la letra E, si el modelo escogido es el simplificado, o la C si es el general.

QE1 para el modelo simplificado

Q1

QC1 para el modelo general

El programa no permite que dos o más elementos tengan la misma denominación. En caso de no respetarse esta norma aparece un mensaje de error.

Una vez definido el elemento, en pantalla se visualiza su símbolo y la referencia de sus terminales para su identificación, debiéndose proceder, seguidamente, a introducir los nodos a los que se encuentra conectado dicho elemento y su valor.

En el caso de que el elemento seleccionado precise de un modelo para su análisis, como sucede para el amplificador operacional y los transistores FET y bipolar, éste aparece en pantalla de forma automática, requiriendo los valores de los componentes que forman parte de él.

Para finalizar la introducción de elementos del circuito, al preguntar el nombre del siguiente elemento se responderá con un asterisco (*) y aparecerá en pantalla

Nombre del fichero de datos?

debiendo responder con el nombre del fichero donde se pretende almacenar la información introducida con anterioridad, sin incluir ni el drive donde se encuentra el disco ni la extensión. El drive se especificará por

Disco de datos en drive (A/B/C)?

y la extensión viene fijada automáticamente por el programa.

En caso de que se omita el nombre del fichero, se asume por defecto la denominación «TEMPORAL» que corresponde a un fichero de este tipo. En pantalla aparece

«drive»:«nombre del fichero».TXT
Grabando el fichero

El fichero así creado se almacena en el disco del drive seleccionado con la extensión TXT («nombre del fichero».TXT).

Una vez completado el proceso de grabación el programa vuelve de nuevo al MENU 1.

### 6.2.2 Entrada de elementos de un circuito SC

Con esta opción se introducirán circuitos de condensadores conmutados (SC) para su análisis. Las preguntas que aparecen por pantalla son

Número de condensadores (MAXIMO = 50)?
Número de AO (MAXIMO = 20)?

cuyas respuestas deben corresponder al número de condensadores y amplificadores operacionales existentes en el circuito. Otros datos, también necesarios, son la relación de condensadores que forman el circuito, su valor y los nodos a los que están conectados. Esta información será adquirida por el programa de la siguiente forma

Condensador?
Valor?

Al igual que en la entrada de circuitos analógicos, para definir el nombre del elemento, no puede existir ningún espacio de separación entre caracteres y, además, el primero de ellos debe ser una «C» o «c».

| | | | |
|---|---|---|---|
| Cl | elemento VALIDO | C l | elemento NO VALIDO |
| condl | ,, ,, | cond l | ,, ,, |

En la pantalla se visualiza una representación esquemática de un condensador y la referencia de sus terminales para la identificación posterior.

Por tratarse de circuitos SC se han de introducir los nodos a los que se conectará el condensador en cada una de las fases.

FASE1 Condensador

Terminal (+): Nodo?

Hay que especificar uno de los cuatro tipos de nodos posibles en los circuitos

SC que cumplen con las condiciones mencionadas en el capítulo 5. Para ello se ha elegido una simbología que relaciona determinados caracteres con dichos nodos y que aparece en pantalla.

| | |
|---|---|
| V: | Salida de un AO |
| S: | Entrada inversora de un AO |
| I: | Entrada del circuito |
| M: | Masa del circuito |

Si el nodo es la entrada (S) o la salida (V) de un amplificador operacional el programa preguntará el número del AO al que corresponde de la forma

Terminal (+): Nodo? S (o V) correspondiente al AO?
Terminal (−): Nodo? ...

Para la fase 2 se procede de igual forma.

La entrada de elementos finaliza en el momento en que se haya introducido el número de condensadores indicado con anterioridad.

La información se almacena en un fichero de iguales características que en el caso de circuitos analógicos, tomando el mismo tipo de denominación («nombre del fichero».TXT).

Al finalizar este proceso el programa vuelve de nuevo al MENU 1.

### 6.2.3 Listado o modificación de un fichero existente

Es posible que, en algún caso, se desee saber el contenido de un fichero para corroborar su validez o bien se pretenda hacer una modificación, por ser incorrecto el circuito que se haya introducido o porque se pretenda variar sus características. Al seleccionar esta opción aparecerá en pantalla

Nombre del fichero de datos?
Disco de datos en drive (A/B/C)?

debiendo responder con el nombre del fichero en el que se tiene almacenada la información y el drive donde se encuentra ubicado el disco de datos.

Si no se especificara ningún nombre de fichero, éste asumiría que se trata de un fichero temporal en cuyo caso buscaría uno con el nombre TEMPORAL.TXT.

Una vez elegido el fichero, existe la posibilidad de comprobar el contenido del mismo respondiendo afirmativamente (S) a la pregunta

Quieres listar el fichero (S/N)?

en cuyo caso aparece una relación de los elementos que componen el circuito, su conexión y el valor de cada uno de ellos.

```
Ein 1 0 1.05
rin 1 2 .5
R1 2 3 1
QC1 3 0 4 .1 10 50 1E-12 1E-6 .1E-12 2E-4 .5E-12 .05E-3
R2 3 0 5
.
.
.
Pulse una tecla para seguir
```

Por el contrario, si la respuesta es negativa (N) o simplemente RETURN se pasa directamente a la posible modificación del fichero.

Quieres modificar el fichero (S/N)?

En caso negativo el programa vuelve al MENU 1, pero si la respuesta es afirmativa se discierne entre circuitos analógicos o de condensadores conmutados

Circuito analógico o SC (A/SC)?

Es muy importante tener en cuenta qué tipo de circuito se está estudiando pues la construcción de los ficheros es diferente según el caso que se trate y, por consiguiente, un error en la elección puede dar lugar a resultados posteriores incorrectos.

Sin embargo, aunque el tratamiento de los ficheros es distinto según el tipo de circuito que se analice, su modificación se hace siguiendo un proceso común, que se describe a continuación.

Los mensajes que se visualizan son

Quieres eliminar algún elemento[1] (S/N)?

Si la respuesta es afirmativa aparece, en el caso de circuitos analógicos, la relación de denominaciones de elementos

Elemento?

| | | | |
|---|---|---|---|
| R... | —Resistencia | G... | —Conductancia |
| C... | —Condensador | L... | —Inductor |
| E... | —Fuente de tensión | J... | —Fuente de Corriente |
| O... | —Ampl. Operacional | Q... | —Transistor bipolar |
| M... | —Acopl. magnético | QF... | —Transistor FET |
| TVC... | —Trans. tensión-corriente | | |
| : | : | : | : |

*—Fin Introducción Elementos

debiendo introducir el elemento a eliminar.

(1) En el caso de tratarse de un circuito SC, en todas las preguntas en lugar de la palabra elemento aparece condensador.

Un caso particular es el del transistor. Como ya se explicó con anterioridad, este elemento toma denominaciones diferentes según el modelo elegido, por lo que cuando se quiera acceder a uno de estos elementos, para su modificación, deberá introducirse la denominación que incluya el tipo de modelo utilizado.

Para circuitos SC el mensaje que se visualiza es

Condensador?

y se tendrá que responder con el nombre del condensador a eliminar.

Tanto para circuitos analógicos como de condensadores conmutados, en el caso de que el nombre del elemento no sea correcto o éste no exista, el programa transmite un mensaje de error. Si, por el contrario, es correcto éste será eliminado del fichero visualizándose el siguiente mensaje

Quieres eliminar algún elemento más (S/N)?

Respondiendo afirmativamente se repite la situación anterior.

En caso de que la respuesta a cualquiera de las preguntas relativas a la eliminación de un elemento sea negativa, aparece en pantalla

Quieres añadir algún elemento (S/N)?

Seleccionando la opción afirmativa se activa el proceso de generación de un nuevo elemento en el fichero de trabajo y su introducción se realiza de la misma forma que en la entrada de elementos (tanto para analógicos como para SC). Si el elemento en cuestión ya existiera, se obtendría un mensaje de error como respuesta. Si no es así, el programa pregunta

Quieres añadir algún elemento más (S/N)?

y se repite de nuevo el proceso hasta que se responda no, con lo que aparece en pantalla

Quieres modificar algún elemento (S/N)?

Con esta opción lo que se consigue es que a un elemento ya existente se le puedan modificar los nodos de conexión al circuito, su valor y el modelo equivalente si lo tuviera. Hay que hacer constar que cuando se realice una modificación se deberán introducir todos los datos del elemento, tanto los modificados como los que permanezcan inalterados. Por tanto, el cambio se realiza como si se tratara de uno nuevo, de forma que se incorpora al fichero sustituyendo todos los parámetros anteriores por los actuales. Si el elemento que se pretende modificar no existiera, respondería con un mensaje de error.

Al acabar, pregunta

Quieres modificar algún elemento más (S/N)?

En caso afirmativo se repite el proceso anterior, de lo contrario, grabará los nuevos datos indicando el fichero donde se almacenará la información mediante el mensaje

«drive»:«nombre de fichero».TXT
Grabando el fichero

Al finalizar se produce de nuevo el retorno al MENU 1 para seguir la ejecución del programa.

### 6.2.4 Cálculo de la matriz del sistema

Para la obtención de la matriz del sistema se partirá de un fichero tipo texto, con la extensión TXT, generado en el proceso anterior o creado mediante un editor de textos. En pantalla aparecerá

Nombre del fichero de datos?
Disco de datos en drive (A/B/C)?

Una vez introducido el nombre del fichero y el drive correspondiente, se tiene que seleccionar el tipo de circuito de que se trata

Circuito analógico o SC (A/SC)?

Como se ha dicho anteriormente, el tratamiento del fichero es distinto según corresponda a un circuito analógico o SC, por lo que una respuesta incorrecta generará mensajes de error en los siguientes pasos del programa. Existen rutinas que detectan dónde se ha producido el error y qué tipo de error es (sintaxis, número de elementos excesivo, circuito sin excitación, elemento desconocido, superado el orden máximo, etc.), cancelándose el análisis si es necesario.

A partir de este punto, según el tipo de circuito, el programa tomará dos vías diferentes.

Para circuitos analógicos lista el fichero que contiene la información del circuito («nombre del fichero».TXT)

```
1 : J1 0 1 1
2 : g1 1 0 .5
3 : G2 1 2 50
4 : TVV 1 2 3 0 200
5 : OpAmp1 ...
```

Pulsa una tecla para seguir

y pregunta si se pretenden normalizar los parámetros

Aplicar constantes de normalización (S/N)?

La normalización se realiza para que los elementos de la matriz no tengan una dispersión de valores muy acusada, hecho que podría provocar rebasamientos de memoria durante la ejecución del programa y, por tanto, su finalización. Además, es importante que la frecuencia de normalización sea tal que el intervalo de frecuencias de interés esté próximo a la unidad. En caso contrario y si el orden estimado del circuito es superior al real, pueden producirse errores difícilmente detectables. Los parámetros se introducirán, en caso de respuesta afirmativa, con

—Resistencia de normalización?
—Factor de normalización frecuencial?

A continuación, tanto si se han aplicado parámetros de normalización como si no, en la pantalla se lista la relación del número que tiene asignado cada ecuación adicional con el elemento que la ha generado, lo que facilita la identificación de algunas posibles variables de salida.

Un ejemplo sería el siguiente

| ECUACIONES ADICIONALES | ELEMENTO |
|---|---|
| 5 | Ein |
| 6 | L1 |
| 7 | OpAmp1 |
| . | . |
| . | . |

Pulsa una tecla para seguir

donde los números del 1 al 4, que no están reflejados en la relación anterior, corresponden a las ecuaciones KCL en los nodos del circuito y del 5 en adelante a las ecuaciones adicionales. Así, cada tension nodal tendrá asignado un número del 1 al 4, mientras que las variables introducidas por los elementos que precisan de una ecuación adicional tendrán asignado un número mayor que 5, según la relación anterior.

Si no se detecta ningún tipo de error, el programa sigue su ejecución creando y grabando un nuevo fichero con la matriz del sistema, cuyos elementos son coeficientes reales o polinomios de primer grado en *s*. Este fichero tiene como denominación «nombre del fichero».MAT y en la pantalla aparecerá un mensaje de grabación

«drive»:«nombre del fichero».MAT
Grabando el fichero

Para circuitos SC se considera que los condensadores ya han sido introducidos normalizados y en pantalla se visualiza el mensaje

Calculando la matriz del sistema

Una vez se ha determinado esta matriz, cuyos elementos serán de nuevo polinomios como máximo de primer grado, aunque en este caso de la variable $z$, el programa lista el fichero que contiene el circuito

1: 3 n−1
2: C1 1.0021 +S1 −I0 +S1 −I0
3: c6 1 +S1 −V1 +S1 −V1
4: C2 .03153 +S2 −I0 +S2 −I0
:
n: C8 .55 +S3 −V3 +M0 −M0

Pulsa una tecla para seguir

y finaliza, al igual que en circuitos analógicos, creando y grabando en el fichero la matriz del sistema

«drive»:«nombre del fichero».MAT
Grabando el fichero

Una vez grabado el fichero el programa vuelve al MENU 1.

### 6.2.5 Fin de la ejecución

Con esta opción se vuelve al MENU PRINCIPAL.

## 6.3 OBTENCION DE LA FUNCION DE TRANSFERENCIA

El siguiente paso, una vez obtenida la matriz del sistema, es calcular la función de transferencia. Para ello se dispone de la opción 2 del MENU PRINCIPAL y al acceder a ella se visualiza el MENU 2 que engloba las siguientes opciones

1: Entrada manual de la matriz del sistema
2: Modificación de la matriz
3: Listado de la matriz
4: Cálculo de la función de transferencia
5: Obtención de las raíces
6: Fin de ejecución

OPCION?

A continuación se dará una descripción detallada de cada una de ellas.

### 6.3.1 Entrada manual de la matriz del sistema

Al elegir esta opción aparece en pantalla

ENTRADA MANUAL DE LA MATRIZ
Orden de la matriz?

El orden de la matriz, para circuitos analógicos, es el correspondiente al número de nodos más el número de ecuaciones adicionales y para los SC equivale al doble del número de amplificadores operacionales del circuito.

Por consiguiente, habrá que discernir entre circuitos analógicos y de condensadores conmutados respondiendo a la pregunta

Circuito analógico o SC (A/SC)?

Una vez incorporada esta información se empieza a introducir la matriz del sistema y el vector o vectores de los términos independientes según el siguiente formato

MATRIZ DEL SISTEMA
T(1,1)=

Se introducirá, a continuación, el término independiente del polinomio correspondiente al elemento de la primera fila y columna de la matriz, al que se denomina $k$ para generalizar, y al pulsar RETURN el programa contestará con el siguiente mensaje

T(1,1)=k s o z⇒

debiendo responder con el coeficiente del término de primer grado (en $s$ para circuitos analógicos y en $z$ para los SC) del mismo elemento.

Todos los elementos de la matriz y del término independiente se introducirán, de igual forma que el descrito, a medida que los vaya requiriendo el programa, con la salvedad de que en el caso de tratarse de un elemento del término independiente aparecerá el mensaje

TERMINO INDEPENDIENTE
T(1,N+1)=

El tratamiento dado por el programa a los coeficientes de la matriz del sistema y del término independiente es el mismo, almacenándolos en una sola matriz no cuadrada, donde la última columna, para circuitos análogicos, o las dos últimas, para los de condensadores conmutados, corresponderán a los elementos del vector o vectores del término independiente.

Al finalizar la introducción de datos se tiene que especificar el nombre del fichero donde se pretende almacenar dicha información y el drive donde se encuentra el disco, respondiendo a las preguntas

Nombre del fichero de datos?
Disco de datos en drive (A/B/C)?

El programa almacena la matriz del sistema introducido en un fichero, con la denominación «nombre del fichero».MAT, que se grabará en el disco del drive especificado apareciendo en la pantalla el mensaje

«drive»:«nombre del fichero».MAT
Grabando el fichero

Una vez finalizado el proceso, el programa vuelve al MENU 2.

### 6.3.2 Modificación de la matriz

Al escoger esta opción hay que especificar el nombre del fichero y el drive donde se encuentra almacenada la información a modificar

Nombre del fichero de datos?
Disco de datos en drive (A/B/C)?

Una vez incorporada esta información en la pantalla se visualiza

MODIFICACION DE DATOS
ORDEN DE LA MATRIZ: x
NUMERO DE VECTORES DEL TERMINO INDEPENDIENTE: 1 o 2

donde los valores que aparecen (*x*, 1 o 2) están fijados por el circuito que se esté tratando.

Para la modificación de los elementos de la matriz se pregunta

Quieres modificar todos los elementos de la matriz (S/N)?

Si se pretenden modificar sólo algunos elementos se deberá responder negativamente, y el programa preguntará, a continuación, de qué elemento se trata, apareciendo en pantalla

T(

En este punto, hay que introducir el número de la fila de la matriz, correspondiente al elemento que pretendemos modificar ($i$), y pulsar RETURN, con lo que se leerá en pantalla

T(i,

Una vez efectuada esta operación, se introducirá el número de la columna ($j$) pulsando de nuevo RETURN.

A continuación se visualizan los valores anteriormente almacenados del término constante ($k$) y de primer orden ($m$) del elemento de la matriz que se vaya a modificar.

T(i,j)=k s o z⇒m ?

El signo de interrogación indica que ya se pueden introducir los coeficientes del polinomio correspondientes al elemento de la matriz.

T(i,j)=k s o z⇒m ?k' ?m'

En el caso de no querer modificar ninguno de los coeficientes, se deberá pulsar simplemente RETURN cuando aparezca el signo de interrogación, dejando el programa inalterado el valor del término almacenado con anterioridad.

Una vez finalizada la modificación de un elemento se pregunta

Otra modificación (S/N)?

Respondiendo afirmativamente se repite el proceso anterior y si la respuesta es negativa se procede a la grabación del fichero sin alterar su denominación.

Por otra parte, si lo que se pretende es modificar toda la matriz del sistema, se deberá responder afirmativamente a la pregunta

Quieres modificar todos los elementos de la matriz (S/N)?

El programa irá listando uno por uno los valores de los elementos y preguntando los nuevos valores, procediendo de igual forma que en el caso de modificación de un solo elemento.

Al finalizar vuelve de nuevo al MENU 2.

### 6.3.3 Listado de la matriz

La opción del MENU 2 escogida para obtener un listado de la matriz del sistema es la 3.

Al igual que en el apartado anterior, la primera información que se deberá proporcionar al programa será la correspondiente al nombre del fichero y el drive donde se encuentran alojados los datos.

Nombre del fichero de datos?
Disco de datos en drive (A/B/C)?

Seguidamente se visualizan los siguientes mensajes

LISTADO DE LA MATRIZ
Pulsa cualquier tecla para visualizar los distintos términos
ORDEN DE LA MATRIZ: x
NUMERO DE VECTORES EN TERMINO INDEPENDIENTE: y
MATRIZ DEL SISTEMA
T(1,1)=k s o z⇒m

Al ir pulsando una tecla cualquiera irán apareciendo todos los elementos de la matriz según el formato

T(1,2)=...
.
.
.
TERMINO INDEPENDIENTE
T(1,N+1)=...
.
.
.

Finalizado el listado el programa vuelve al MENU 2.

### 6.3.4 Cálculo de la función de transferencia

Para calcular la función de transferencia se utilizará la opción 4 del MENU 2. De nuevo los primeros datos que se deberán introducir serán los referentes al nombre y ubicación del fichero de datos

Nombre del fichero de datos?
Disco de datos en drive (A/B/C)?

El programa reconoce qué tipo de circuito (analógico o SC) corresponde al fichero seleccionado, planteando cuestiones diferentes según el caso.

Considerando, en primer lugar, los circuitos analógicos, los mensajes que aparecen y las preguntas que se formulan son

CIRCUITO ANALOGICO
ORDEN DE LA MATRIZ: x
Orden estimado del circuito?
Número de la salida considerada?

El orden de la matriz ($x$) es un dato que el programa interpreta directamente del fichero de datos, sin embargo, el orden del circuito tiene que estimarlo el usuario e introducirlo para su procesado. Esta estimación no deberá ser inferior al orden exacto del circuito ya que de otra forma los resultados serán erróneos.

En cuanto a la pregunta sobre la salida considerada, ésta se refiere al número asignado a la variable elegida como salida del circuito.

Con el fin de poder modificar cualquiera de los datos introducidos hasta este punto, el programa pregunta, a continuación

DATOS CORRECTOS (S/N)?

En caso negativo los datos anteriores no son considerados y se retrocede hasta el MENU 2.

Cuando la respuesta es afirmativa, se inicia el proceso de cálculo de la función de transferencia, según el método descrito en el capítulo 4. Mientras

realiza este algoritmo, en pantalla aparecen diversos mensajes que permiten saber en qué punto de dicho algoritmo se encuentra la ejecución del programa

LU Paso x w = xxx j⇒yyy
Calculando los coeficientes de los polinomios

Una vez finalizado el proceso de cálculo, en la pantalla se listan los polinomios del numerador y del denominador de la siguiente forma

COEFICIENTES DEL NUMERADOR

s0 $b_0$
s1 $b_1$
. .
. .

Pulsa una tecla para seguir

COEFICIENTES DEL DENOMINADOR

s0 $a_0$
s1 a
. .
. .

Pulsa una tecla para seguir

donde los $b_i$ y $a_i$ corresponden a los coeficientes del numerador y denominador calculados, respectivamente.

Para finalizar, ambos polinomios son almacenados en un nuevo fichero de datos con la denominación «nombre del fichero».POL, apareciendo en pantalla

«drive»:«nombre del fichero».POL
Grabando el fichero

y volviendo, de nuevo, al MENU 2.

Por otra parte, si el tipo de circuito corresponde a un SC los mensajes y cuestiones que formula el programa son los siguientes

CIRCUITO DE CONDENSADORES CONMUTADOS
ORDEN DE LA MATRIZ: x

Orden estimado del circuito?
1: Hix
2: Hix + Hiy
3: Hix + zHiy
4: Hix + (1/z)Hiy

Tipo de función (1 a 4)?

En este caso, para el orden estimado del circuito se recomienda introducir la mitad del orden de la matriz, ya que, salvo cancelaciones, éste será el orden exacto del circuito.

Como ya se comentó con anterioridad, existen varias posibilidades en la definición de la función de transferencia a partir de las cuatro funciones parciales. El programa lista las posibles combinaciones debiendo, el usuario, elegir entre ellas. Además, habrá que especificar a qué funciones parciales de transferencia corresponden *Hix* y *Hiy* (esta última sólo en el caso de haber escogido las opciones 2, 3 o 4), por lo que el programa preguntará los subíndices correspondientes

Valor de i (1 o 2)?

Valor de x (1 o 2)?

Valor de y (1 o 2)?[1]

Número de la salida considerada?

El número de la salida considerada debe ser la del amplificador operacional que define la variable de salida del circuito.

Al igual que en circuitos analógicos estos datos se corroborarán contestando afirmativamente a la pregunta

DATOS CORRECTOS (S/N)?

Si la respuesta es negativa no se tienen en cuenta los parámetros introducidos y se retrocede hasta el MENU 2.

Una vez introducidos y confirmados los datos se inicia el proceso de cálculo de la función de transferencia, realizándose de la misma forma que para el caso de circuitos analógicos, con la salvedad de que, en el caso de no corresponder la función de transferencia al primer tipo de las indicadas, el algoritmo se duplica pues el número de funciones parciales de transferencia a calcular es igual a dos. Los mensajes que aparecerán serán

LU Paso x w=xxx j⇒yyy
Calculando los coeficientes de los polinomios

A continuación se listan los polinomios del numerador y denominador de la función de transferencia en la forma

[1] Esta pregunta sólo la formulará en el caso de que la opción escogida no corresponda a la 1.

COEFICIENTES DEL NUMERADOR

z0 $b_0$
z1 $b_1$
. .
. .
. .

Pulsa una tecla para seguir

COEFICIENTES DEL DENOMINADOR

z0 $a_0$
z1 $a_1$
. .
. .
. .

Pulsa una tecla para seguir

Obtenida la función de transferencia el programa vuelve al MENU 2.

### 6.3.5 Obtención de las raíces

Para poder determinar el valor que toman los ceros y polos de la función de transferencia, se dispone de la opción 5 del MENU 2. Esta opción, sin embargo, también permite hallar las raíces de un polinomio que se introduzca manualmente, por lo que se tendrá que diferenciar entre entrada por fichero o de forma manual.

Entrada por fichero (S/N)?

Si se parte de un fichero de datos, con la extensión POL, donde se encuentra almacenada la función de transferencia, calcula los polos o los ceros según requerimiento del usuario. Para ello, éste debe contestar a las siguientes preguntas

Nombre del fichero de datos?
Disco de datos en drive (A/B/C)?
Polos, Ceros o Fin (P/C/F)?

Respondiendo P a la última pregunta el programa calcula los polos de la función de red y los lista de la forma

LOS POLOS SON

x POLO(S) EN EL ORIGEN[1]

RAIZ (1) $= a_1 \pm jb_1$
RAIZ (2) $= a_2 \pm jb_2$
.
.

Pulsa una tecla para seguir

volviendo a la misma pregunta.

[1] El mensaje sobre los polos en el origen únicamente aparecerá en caso de que éstos existan.

Si la respuesta es C serán los ceros los que se calculen, visualizándose

LOS CEROS SON

x CERO(S) EN EL ORIGEN[1]

RAIZ (1) = $a_1 \pm jb_1$
RAIZ (2) = $a_2 \pm jb_2$
.
.
.
Pulsa una tecla para seguir

regresando, de nuevo, a la misma pregunta.

El proceso finaliza al teclear F lo que provoca el retorno del programa al MENU 2.

Por otra parte, en el caso de que la entrada del polinomio, del que se pretenden extraer las raíces, se haga de forma manual, los parámetros que lo definen se introducirán de la siguiente forma

Grado del polinomio? n

COEFICIENTES DEL POLINOMIO POR ORDEN DECRECIENTE

GRADO n? $a_n$
GRADO n − 1? $a_{n-1}$
.
.
.
GRADO 0? $a_0$

donde $n$ es el grado del polinomio y los $a_i$ son sus coeficientes.

Una vez calculadas sus raíces, éstas se visualizarán en pantalla con el mismo formato que se utilizaba para los ceros de la función de red, preguntando el programa, a continuación

Quieres entrar un nuevo polinomio (S/N)?

En caso afirmativo se repite el proceso anterior y en caso negativo el programa vuelve al MENU 2.

El algoritmo utilizado se basa en el método de Lin-Bairstow y presenta, en algunos casos, problemas de convergencia. En caso de no haber llegado a la solución correcta después de 1000 iteraciones da un mensaje de error.

### 6.3.6 Fin de la ejecución

Escogiendo esta opción (6) el programa regresa al MENU PRINCIPAL.

---

[1] El mensaje sobre los ceros en el origen únicamente aparecerá en caso de que éstos existan.

## 6.4 CALCULO Y REPRESENTACION GRAFICA DE LA RESPUESTA FRECUENCIAL

Una vez obtenida la función de transferencia se puede proceder al cálculo y representación gráfica de la respuesta frecuencial correspondiente, para lo cual se dispone de la opción 3 del MENU PRINCIPAL.

Existe la posibilidad de entrar la función de red de forma manual o a través de un fichero donde se encuentre almacenada, por lo que el programa pregunta en primer lugar

Entrada por fichero (S/N)?

Si los datos están almacenados en un fichero, acto seguido preguntará el nombre del mismo y su ubicación de la siguiente forma

Nombre del fichero de datos?
Disco de datos en drive (A/B/C)?

Si no se especifica ningún nombre para el fichero, el programa asume que se trata de un fichero temporal con la denominación TEMPORAL.POL

En caso de entrada manual las cuestiones serán las siguientes

Grado del numerador? n

COEFICIENTES DEL NUMERADOR POR ORDEN CRECIENTE

GRADO 0? $b_0$
GRADO 1? $b_1$
.
.
GRADO n? $b_n$

DATOS CORRECTOS (S/N)?

Los coeficientes $b_i$ corresponden al numerador de la función de red y si se han entrado de forma errónea se pueden modificar contestando negativamente a la última pregunta. En este caso, los coeficientes introducidos no se tendrán en cuenta y el programa volverá a pedir todos los parámetros que definen el numerador.

Una vez validados estos datos, se procede a introducir el denominador de la función de red de igual forma a como se ha realizado con el numerador

Grado del denominador? n

COEFICIENTES DEL DENOMINADOR POR ORDEN CRECIENTE

GRADO 0? $a_0$
GRADO 1? $a_1$
.
.
.

GRADO n? $a_n$

DATOS CORRECTOS (S/N)?

A continuación, se almacena la función de transferencia introducida en el fichero de datos que se especifique mediante

Nombre del fichero de datos?
Disco de datos en drive (A/B/C)?

apareciendo en pantalla el mensaje

«drive»:«nombre del fichero».POL
Grabando el fichero

En caso de no especificar el nombre del fichero, el programa asume que se trata de un fichero temporal y, dado que es posible introducir hasta 6 funciones de transferencia, habrá que poder diferenciarlas, por lo que la denominación que adquieren en este caso es TEMP x.POL, donde *x* puede variar de 1 a 6.

Cuando el programa dispone ya de la información sobre la función de transferencia, tanto si se ha introducido por fichero como si ha sido de forma manual, pregunta a qué tipo de circuito pertenece dicha función

Función de transferencia de un circuito analógico o SC (A/SC)?

Esta distinción es de gran importancia ya que el cálculo de la respuesta frecuencial se realiza de diferente forma según sea el tipo de circuito; sin embargo, no se reflejará de forma muy acusada en las preguntas y mensajes que se suceden en el transcurso del programa.

Definido el tipo de circuito, la siguiente cuestión que aparece en pantalla es

Tablas, Gráficas, Cambio Función Transferencia o Fin Ejecución (T/G/C/F)?

La respuesta C se elegirá cuando se pretenda estudiar una nueva función de transferencia, con lo que el programa volverá a preguntar toda la información sobre la nueva función.

Si se responde F, finaliza la ejecución de esta opción y el programa regresa al MENU PRINCIPAL.

Con las otras dos posibilidades se obtendrá la respuesta frecuencial del circuito. Debido a que el programa discurre por vías distintas, según sea la opción elegida, se describen a continuación cada una de ellas.

En primer lugar se considerará la representación tabular. Al escogerla, pulsando la letra T, aparecerá en pantalla la pregunta

Frecuencia determinada o Intervalo de frecuencias (D/I)?

Si únicamente se necesita el valor de la respuesta frecuencial para un determinado valor de la frecuencia, se deberá contestar pulsando D y acto seguido, si se trata de un circuito analógico, el programa preguntará

Frecuencia (Hz) o Pulsación (rad/s) (F/P)?

lo que permite elegir entre las variables frecuencia $f$ y pulsación $\omega$ para después introducir su valor normalizado respondiendo a

Frecuencia en Hz?

o bien

Pulsación en rad/s?

Si el circuito considerado es de condensadores conmutados, la pregunta será

Angulo en grados?

En cualquier caso, la información sobre dicha respuesta vendrá dada en el formato

MODULO =
MODULO (dB) =
ARGUMENTO =
Re [H(jw)] =
Im [H(jw)] =

salvo el término *jw* que en circuitos SC aparecerá como *z*.

De otro lado, si el valor elegido coincide con un cero o un polo de la función de red o en él se produce una cancelación polo-cero, en lugar de aparecer el listado anterior, se visualizan los siguientes mensajes, respectivamente

CERO DE LA FUNCION DE TRANSFERENCIA
POLO DE LA FUNCION DE TRANSFERENCIA
CANCELACION DE POLOS Y CEROS

Al finalizar, el algoritmo permite calcular el valor de la respuesta frecuencial para otro valor, por lo que el programa preguntará, a continuación

Otro valor de la frecuencia (S/N)?

cuando se trate de un circuito analógico o

Otro valor del ángulo (S/N)?

cuando sea un SC.

Respondiendo afirmativamente el proceso se repite; por el contrario, cuando la respuesta es negativa volverá a preguntar

Tablas, Gráficas, Cambio Función Transferencia o Fin Ejecución (T/G/C/F)?

Si al elegir la opción tabular lo que se pretende es obtener un conjunto de valores correspondientes a un determinado intervalo, se responderá I a la pregunta

Frecuencia determinada o Intervalo de frecuencias (D/I)?

con lo que en pantalla aparecerá

Escala? (N=LINEAL / L=LOGARITMICA)

En el caso de que se quiera una distribución lineal del eje de frecuencias se deberá responder con una N a la pregunta sobre la escala y si, por el contrario, se prefiere logarítmica, se responderá L.

Si el circuito es analógico, el programa pregunta a continuación

Frecuencia (Hz) o Pulsación (rad/s) (F/P)?

debiendo contestar según la modalidad de representación tabular que se prefiera.

La siguiente cuestión, tanto si el circuito es analógico como SC, es la referente al intervalo

Intervalo? ? (ANGULO EN GRADOS)[1]

En principio aparece en pantalla sólo el primero de los interrogantes, debiendo introducir el valor inicial de dicho intervalo y pulsar RETURN, visualizándose, a continuación, el otro signo de interrogación que ahora se referirá al valor final de aquél.

La siguiente pregunta será, en el caso de haber escogido la escala lineal

Escalado?

y en el caso de haberla elegido logarítmica

Número de puntos?

El escalado de la distribución lineal es el valor de la distancia entre muestras

---

(1) El mensaje de ANGULO EN GRADOS sólo aparecerá cuando se trate un circuito SC.

que se prefiera, mientras que, para el caso logarítmico, el dato al que se tiene acceso es el número de valores que se quiere calcular, siendo estas muestras equidistantes en el eje logarítmico.

Por otra parte, si se pretenden listar los resultados por impresora se deberá responder afirmativamente a la pregunta

Resultados en papel (S/N)?

Al igual que en otros puntos del programa, aquí se deberá corroborar la validez de los datos introducidos respondiendo a la pregunta

DATOS CORRECTOS (S/N)?

Si la respuesta es negativa, vuelve a preguntar todos los datos referentes al intervalo y, cuando es afirmativa, calcula la respuesta frecuencial y la lista en forma de tabla según el formato

| FREC[1] Hz | MODULO | MOD. dB | ARG. | P.REAL | P.IMAG. |
|---|---|---|---|---|---|
| : | : | : | : | : | : |

Pulsa una tecla para seguir

En el caso particular de que un punto coincida con un cero o un polo o bien se produzca una cancelación polo-cero en él, en lugar de aparecer la relación de los valores del módulo, módulo en dB, argumento, etc., se visualiza uno de los siguientes mensajes

CERO DE LA FUNCION DE TRANSFERENCIA
POLO DE LA FUNCION DE TRANSFERENCIA
CANCELACION DE POLOS Y CEROS

Para finalizar existe la opción de poder listar otro intervalo de la misma respuesta frecuencial, por lo que el programa pregunta

Otro intervalo (S/N)?

volviendo a requerir, en caso afirmativo, toda la información sobre el nuevo intervalo y repitiéndose el proceso anterior. Si se responde negativamente la pregunta siguiente será, de nuevo

Tablas, Gráficas, Cambio Función Transferencia o Fin Ejecución (T/G/C/F)?

[1] En el caso de tratarse de un circuito de condensadores conmutados, en lugar de FREC, es ANGULO.

Queda por considerar la opción gráfica de esta última pregunta, que se escoge tecleando G, con lo que aparece en pantalla

Tipo de Gráfica? (1=MODULO / 2=ARGUMENTO)

Elegido uno de estos dos posibles tipos, será necesario introducir los parámetros referentes a los ejes de la gráfica a medida que lo requiera el programa.

Para el eje de abscisas el programa pregunta

EJE DE ABSCISAS

Escala? (N=LINEAL / L=LOGARITMICA)
Frecuencia (Hz) o Pulsación (rad/s) (F/P)?
Intervalo? ? (ANGULO EN GRADOS)
Alta, Media o Baja Resolución (A/M/B)?

La pregunta sobre frecuencia o pulsación sólo aparecerá si el circuito es analógico, correspondiendo la representación a la modalidad seleccionada, y el mensaje ANGULO EN GRADOS sólo se visualiza si el circuito es un SC. Los datos de la escala, la modalidad de representación y el intervalo se introducirán de igual manera a como se realizó en el caso de la opción tabular.

Dependiendo del grado de precisión con que se pretenda obtener la gráfica habrá que elegir uno de los tres tipos de resolución. El número de puntos que se calculan es de 50, 166 y 500 según se escoja baja (B), media (M) o alta (A) resolución, respectivamente, y por consiguiente cuanto mayor sea la resolución exigida mayor será el tiempo de ejecución.

Definidos los datos necesarios para el eje de abscisas y en el caso de que se trate de la representación gráfica del módulo, el programa pregunta el escalado del eje de ordenadas, pudiendo representar tanto la amplificación (N) como la ganancia (L).

EJE DE ORDENADAS (MODULO)
Escala? (N=LINEAL / L=LOGARITMICA)

En la gráfica del argumento el eje de ordenadas siempre se escala de forma lineal por lo que el programa no preguntará ningún dato sobre este eje, representando esta magnitud en grados.

Llegados a este punto, existe la posibilidad de modificar los parámetros referentes a la gráfica que se hayan introducido. Para ello basta con contestar negativamente a la pregunta

DATOS CORRECTOS (S/N)?

en cuyo caso volverá de nuevo a preguntar el tipo de gráfica a representar y todos sus datos.

Si la respuesta es afirmativa aparece el siguiente mensaje

CALCULANDO PUNTO x

donde *x* representa el punto que está calculando y variará en función del tipo de resolución que se haya escogido.

Al finalizar el cálculo, pregunta

Otra función de transferencia en la gráfica (S/N)?

lo que habilita la posibilidad de que en una misma retícula se representen hasta seis gráficas, de módulo o de argumento, correspondientes a seis funciones de transferencia del mismo tipo.

En caso de que la respuesta sea afirmativa, la introducción de la siguiente función de transferencia se realiza según el método descrito con anterioridad, tanto si proviene de un fichero como si la entrada es manual, por lo que en primer lugar preguntará

Entrada por fichero (S/N)?

Sin embargo, por tratarse de una gráfica superpuesta a otra, no pedirá ni el tipo de gráfica ni los datos referentes a los ejes de abscisas y ordenadas pues ya estarán fijados.

Cada vez que se introduzca una nueva función de transferencia aparece el mensaje

CALCULANDO PUNTO x

Al finalizar vuelve a preguntar si se desea otra función de transferencia en la gráfica. En caso afirmativo se repite el proceso anterior hasta seis veces, que es el máximo de gráficas permitidas.

Si la respuesta es negativa se procederá a definir los parámetros de la retícula de la siguiente forma

Título línea 1?
Título línea 2?

Estas dos preguntas sirven para introducir posibles títulos o comentarios aclaratorios que después aparecerán en la gráfica.

Una vez introducidas se darán las carácterísticas de los ejes de abscisas y ordenadas para su representación gráfica. En la pantalla aparece

EJE DE ORDENADAS

VALOR MAXIMO = $x_{MAX}$ VALOR MINIMO = $x_{MIN}$
Valor inicial en la gráfica?
Número de divisiones (OPTIMAS: 2,3,6,9)?
Escalado de la retícula (MINIMO $z_{MIN}$)?
VALOR MAXIMO EN LA GRAFICA = $y_{MAX}$

El valor máximo, que aparece como $x_{MAX}$, corresponde al máximo de todos los puntos calculados para la representación frecuencial (módulo o argumento) de las seis posibles funciones de transferencia que se pueden introducir y el valor $x_{MIN}$ es el correspondiente al mínimo. Estos valores serán útiles para hacer una estimación del escalado de la retícula y del número de divisiones, con el fin de que todas las gráficas queden dentro de los márgenes establecidos.

Una vez dado el valor inicial en la gráfica, que en caso de pulsar RETURN acepta como cero, pide el número de divisiones del eje de ordenadas. En él aparecen una serie de valores que se consideran óptimos a efectos de utilización del máximo espacio en pantalla para la representación gráfica. Definido este valor el programa calcula el mínimo escalado de la retícula para que todas las funciones estén dentro de estos márgenes y aparecerá en la pregunta del escalado como el valor $z_{MIN}$. Una vez definido el escalado, el programa calcula el valor máximo en la gráfica para ver si los parámetros propuestos entran dentro de las predicciones. En caso negativo existe la posibilidad de cancelar todos estos datos contestando de forma negativa a la pregunta

DATOS CORRECTOS (S/N)?

Si no existe ningún error se procede a la entrada de los parámetros

Notación exponencial (S/N)?
Número de decimales (MAXIMO $d_{MAX}$)?
Unidades (EN LETRAS)?

que corresponden a la notación del eje. El número $d_{MAX}$ indica el máximo número de decimales que pueden ser representados en pantalla. En el caso de que el escalado sea inferior a $10^{-3}$ se recomienda utilizar la notación exponencial.

La pregunta sobre las unidades se refiere tanto a la denominación del eje como a sus unidades y si se quiere que éstas aparezcan en la gráfica deberán introducirse respondiendo a esa pregunta.

Definidos todos los datos referentes al eje de ordenadas se introducirán los del eje de abscisas de la forma siguiente

EJE DE ABSCISAS

f1 ? f        f2 ? f'

o

w1 ? w        w2 ? w'

Los valores de $f$ y $f'$ o $w$ y $w'$ corresponderán a la frecuencia o pulsación inferior y superior, respectivamente, del intervalo que se pretende que cubra el eje de frecuencias, en el caso de un circuito analógico. Si el circuito es un SC la pregunta aparece como

$\theta 1$ ? $\theta$        $\theta 2$ ? $\theta'$

donde $\theta$ y $\theta'$ serán los límites del eje de abscisas que en este caso representa una magnitud angular.

Una vez definido el intervalo, si la representación elegida para el eje era lineal preguntará

Escalado de la retícula (NUM. MAX. DIVISIONES = $k_{MAX}$)?

debiendo responder con el valor de la distancia entre muestras que se desee, teniendo en cuenta que éste no debe ser tal que produzca un número de divisiones superior al máximo ($k_{MAX}$) especificado en la misma pregunta.

Si la escala era logarítmica y el intervalo es igual o mayor que una década, la pregunta será

Divisiones por década (1/2/4/9)?

refiriéndose al número de particiones en cada una de las décadas.

Si el intervalo de frecuencias es inferior a una década, el programa pregunta por el escalado de la retícula que será representada sobre un eje logarítmico.

En cualquier caso, se visualizará en pantalla el mensaje

NUMERO DE DIVISIONES = d

siendo $d$ el número total de divisiones que aparecerán en la retícula horizontal.

Al igual que en otros casos, si se ha producido un error o los parámetros obtenidos no son los esperados, también es posible descartar los valores de los datos introducidos contestando negativamente a la cuestión

DATOS CORRECTOS (S/N)?

Si, por el contrario, se responde afirmativamente, se tendrán que especificar los parámetros

Notación exponencial (S/N)?
Número de decimales (MAXIMO $p_{MAX}$)?
Unidades (EN LETRAS)?

del mismo modo que se hizo para el eje de ordenadas.

Una vez definidos todos los parámetros necesarios, el programa está listo para el trazado de la gráfica, pudiendo optar por incluir la retícula en la representación o representar únicamente los ejes.

Dibujo la retícula (S/N)?

Elegida esta posibilidad, en pantalla aparece la gráfica o gráficas de la respuesta en frecuencia, con todos los parámetros introducidos con anterioridad.

En el programa no existe ninguna opción para salida por impresora de esta gráfica, por lo que si se desea una reproducción de la misma, será necesario realizarla pulsando la tecla «Print Screen»(1) que volcará el contenido de la pantalla en la impresora.

Para seguir la ejecución del programa será necesario pulsar RETURN con lo que la gráfica desaparecerá de pantalla y se formulará la cuestión

Quieres modificar la retícula (S/N)?

Esta opción permite la modificación de todos los parámetros de la retícula en caso de que la gráfica obtenida no haya sido del agrado del usuario. Si se pretende realizar dicha modificación se contestará afirmativamente, en cuyo caso volverá a pedir todos los datos de la misma forma.

Título línea 1?
Título línea 2?
⋮

Si, por el contrario, la respuesta es negativa el programa sigue su ejecución preguntando

Quieres la curva del argumento (S/N)?

en el caso de que la curva obtenida con anterioridad fuera la del módulo y

Quieres la curva del módulo (S/N)?

cuando la gráfica correspondía a la del argumento.

Respondiendo afirmativamente, el programa pasará a representar la curva requerida después de preguntar, de nuevo, todos los datos referentes a la retícula y, si la nueva curva es la del módulo, preguntará además la escala del eje de ordenadas (lineal o logarítmica).

Si se contesta negativamente a cualquiera de las dos preguntas anteriores la siguiente opción a elegir es

Quieres definir un nuevo intervalo (S/N)?

Esta opción será válida para poder estudiar la respuesta en frecuencia de la misma función o funciones en otro intervalo. Al escogerla preguntará de nuevo el tipo de gráfica (módulo o argumento) y los datos referentes a los ejes de abscisas y ordenadas como se hizo anteriormente, obteniendo la gráfica en el nuevo intervalo sin necesidad de especificar otra vez las funciones a representar.

---
(1) La denominación de la tecla que produce esta acción puede variar según el tipo de PC utilizado.

En el caso de no querer definir un nuevo intervalo se pregunta

Quieres seguir la ejecución del programa (S/N)?

Si se desea finalizar la ejecución, se contestará de forma negativa, con lo què el programa vuelve al MENU PRINCIPAL, mientras que si la respuesta es afirmativa se vuelven a requerir la función o funciones de transferencia para una nueva ejecución del programa.

Como se puntualizó con anterioridad, el tratamiento para circuitos SC es similar al de analógicos, salvo que el cálculo de la respuesta en frecuencia se realiza de forma diferente y en algunas cuestiones se intercambian los papeles de frecuencia y ángulo y las variables *jw* por *z*.

# Capítulo 7
# Ejemplos de aplicación

## 7.1 AMPLIFICADOR DE RADIOFRECUENCIA

El circuito de la figura 7.1, con los valores para los elementos allí indicados, corresponde a un amplificador de radiofrecuencia diseñado para proporcionar una ganancia de aproximadamente 20 dB en una banda centrada en torno a los 100 MHz. La carga está constituida por un resistor de 50 Ω y el generador de la excitación tiene una resistencia interna de 50 Ω.

Se pretende verificar, mediante simulación, lo acertado del diseño. Para ello será necesario, previamente a la introducción de datos en el programa ARIADNA, seleccionar modelos adecuados para el transistor y el transformador.

El transistor empleado es de tipo corriente en aplicaciones de amplificación de señal de RF. Puede caracterizarse por su modelo híbrido en $\pi$ simplificado, con los valores indicados en la figura 7.2 obtenidos a partir de los datos de

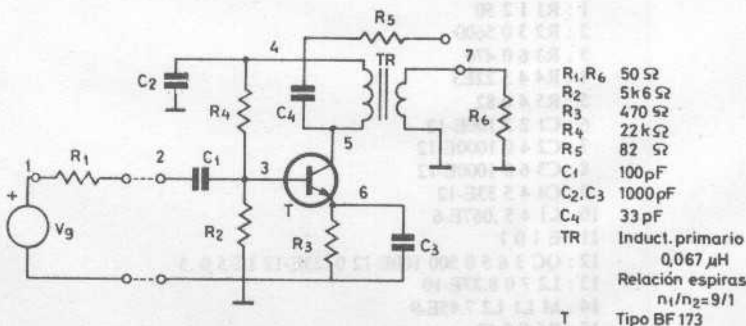



Figura 7.1 Amplificador de radiofrecuencia.

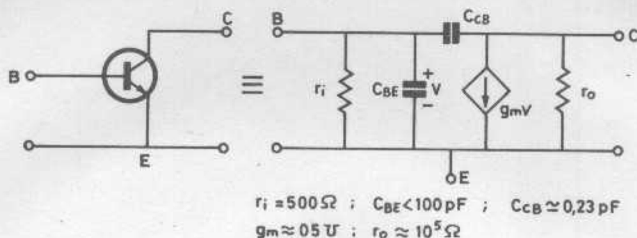



Figura 7.2 Modelo híbrido en $\pi$ del transistor.

catálogos y condiciones de polarización de dicho transistor en el esquema propuesto.

El transformador TR consta de dos devanados sobre un núcleo de ferrita deslizable. La inductancia del primario, con el núcleo en una posición intermedia, es de 0,067 $\mu$H y la relación de espiras entre el primario y secundario es de 9 a 1. Con esta información, puede modelarse el transformador mediante un par de inductores acoplados magnéticamente siendo el coeficiente de acoplamiento próximo a la unidad. La inductancia del secundario puede estimarse a partir de la relación de espiras mediante la expresión $L_p/L_s = n^2$. Se obtiene así el modelo equivalente de la figura 7.3.

Con la información precedente ya es posible suministrar al programa los datos necesarios tal como se muestra en el listado 7.1.

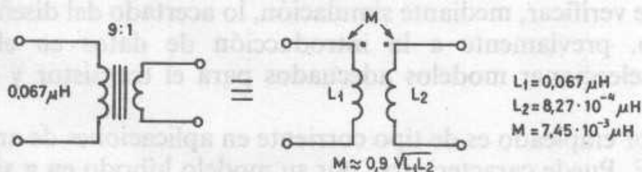



Figura 7.3 Modelo del transformador.

```
 1 : R1 1 2 50
 2 : R2 3 0 5600
 3 : R3 6 0 470
 4 : R4 4 3 22E3
 5 : R5 4 0 82
 6 : C1 2 3 100E-12
 7 : C2 4 0 1000E-12
 8 : C3 6 0 1000E-12
 9 : C4 4 5 33E-12
10 : L1 4 5 .067E-6
11 : E 1 0 1
12 : QC 3 6 5 0 500 100E-12 0 .23E-12 1E-5 0 .5
13 : L2 7 0 8.27E-10
14 : M L1 L2 7.45E-9
15 : R6 7 0 50
```

Listado 7.1

Una vez se han introducido los datos, el programa ofrece la posibilidad de aplicar constantes de normalización. El fin que se persigue con ello es que el programa opere con valores en la matriz del sistema próximos a la unidad, para así mejorar la precisión y evitar desbordamientos. En este caso concreto, la normalización es imprescindible y los valores empleados han sido de 1000 Ω para la resistencia y 100 MHz para la frecuencia, tal como se indica en el listado 7.2.

```
Aplicar constantes de normalización (S/N)? S

    — Resistencia de normalización? 1000
    — Factor de normalización frecuencial? 1E8

CIRCUITO ANALOGICO

    ORDEN DE LA MATRIZ 10
    Orden estimado del circuito? 8
    Número de la salida considerada? 7
```

Listado 7.2

A continuación el programa solicita información relativa al orden del circuito, que en este caso es ocho ($C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$, $C_{BE}$, $C_{CB}$, $L_1$, $L_2$). Finalmente, y puesto que en este circuito se trata de evaluar la función de red $H(s) = V_7/V_1$, a la pregunta relativa al número de salida considerada habrá que contestar con un 7 tal como muestra el listado 7.2. Obsérvese que en el listado 7.1 al generador de la excitación se le asignó amplitud unitaria, de manera que al evaluar la tensión del nodo $V_7$ se obtenga precisamente la amplificación del circuito.

Una vez se ha introducido la información precedente se accede a traves del menú principal al cálculo de la función de transferencia y, a continuación, a la representación gráfica de su módulo. El programa requiere los datos relativos al margen de frecuencias a representar y escalado adecuado para la retícula de presentación de la curva, tal como se muestra en el listado 7.3.

```
Tipo de gráfica? 1        (1=MODULO / 2=ARGUMENTO)

EJE DE ABSCISAS

    Escala      ? N       (N=LINEAL / L=LOGARITMICA)
    Intervalo     ? 0       ? 2
    s⇒FRECUENCIA EN Hz / z⇒ANGULO EN GRADOS
    Alta, Media o Baja resolución (A/M/B) ? A

EJE DE ORDENADAS (MODULO)

    Escala      ? N       (N=LINEAL / L=LOGARITMICA)

    DATOS CORRECTOS (S/N)? S

                                  CALCULANDO PUNTO 384
```

Listado 7.3

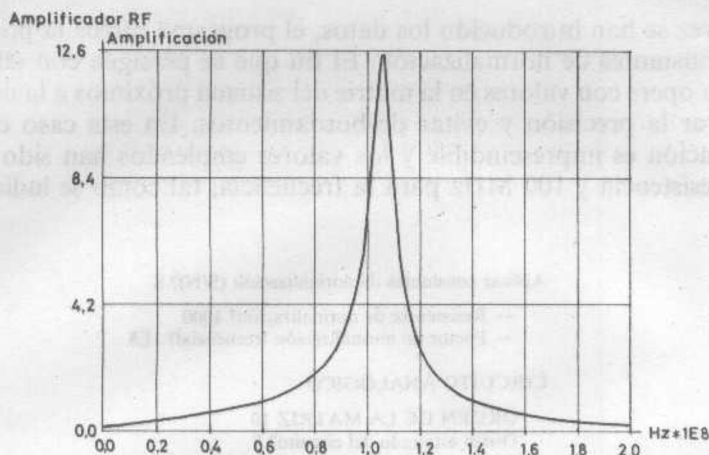



Figura 7.4 Respuesta frecuencial del amplificador de RF.

Se obtiene así la curva de amplificación mostrada en la figura 7.4 que permite apreciar el pico de resonancia en torno a los 100 MHz con una amplificación de 12 (21 dB). En la figura 7.5 se muestra un detalle ampliado del pico de resonancia que permite evaluar con precisión el factor de calidad (puntos a −3 dB).

Finalmente, si se desea, puede obtenerse una tabla con los valores antes representados gráficamente. Se observa así en el listado 7.4 que el máximo de la curva de amplificación tiene un valor de 21,84 dB y se produce a 105,6 MHz.

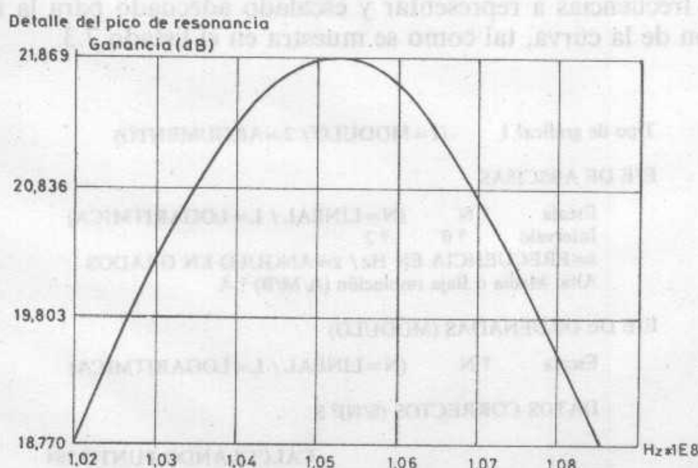



Figura 7.5 Detalle del pico de resonancia.

| FREC. Hz | MODULO | MOD. dB | ARG. | P. REAL | P. IMAG. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1.03900E+00 | 1.12719E+01 | 21.03991 | −21.3 | 1.05040E+01 | −4.08918E+00 |
| 1.04000E+00 | 1.14013E+01 | 21.13908 | −22.8 | 1.05107E+01 | −4.41753E+00 |
| 1.04100E+00 | 1.15259E+01 | 21.23349 | −24.4 | 1.05001E+01 | −4.75340E+00 |
| 1.04200E+00 | 1.16449E+01 | 21.32274 | −25.9 | 1.04709E+01 | −5.09563E+00 |
| 1.04300E+00 | 1.17577E+01 | 21.40647 | −27.6 | 1.04221E+01 | −5.44288E+00 |
| 1.04400E+00 | 1.18635E+01 | 21.48427 | −29.2 | 1.03527E+01 | −5.79354E+00 |
| 1.04500E+00 | 1.19616E+01 | 21.55580 | −30.9 | 1.02619E+01 | −6.14600E+00 |
| 1.04600E+00 | 1.20513E+01 | 21.62067 | −32.6 | 1.01491E+01 | −6.49835E+00 |
| 1.04700E+00 | 1.21319E+01 | 21.67856 | −34.4 | 1.00139E+01 | −6.84863E+00 |
| 1.04800E+00 | 1.22028E+01 | 21.72916 | −36.1 | 9.85606E+00 | −7.19482E+00 |
| 1.04900E+00 | 1.22634E+01 | 21.77219 | −37.9 | 9.67558E+00 | −7.53480E+00 |
| 1.05000E+00 | 1.23131E+01 | 21.80737 | −39.7 | 9.47280E+00 | −7.86634E+00 |
| 1.05100E+00 | 1.23517E+01 | 21.83452 | −41.5 | 9.24829E+00 | −8.18738E+00 |
| 1.05200E+00 | 1.23786E+01 | 21.85343 | −43.3 | 9.00291E+00 | −8.49573E+00 |
| 1.05300E+00 | 1.23937E+01 | 21.86400 | −45.2 | 8.73775E+00 | −8.78947E+00 |
| 1.05400E+00 | 1.23967E+01 | 21.86613 | −47.0 | 8.45418E+00 | −9.06673E+00 |
| 1.05500E+00 | 1.23877E+01 | 21.85982 | −48.8 | 8.15379E+00 | −9.32582E+00 |
| 1.05600E+00 | 1.23666E+01 | 21.84504 | −50.7 | 7.83836E+00 | −9.56526E+00 |
| 1.05700E+00 | 1.23337E+01 | 21.82189 | −52.5 | 7.50985E+00 | −9.78381E+00 |
| 1.05800E+00 | 1.22892E+01 | 21.79047 | −54.3 | 7.17032E+00 | −9.98053E+00 |
| 1.05900E+00 | 1.22334E+01 | 21.75095 | −56.1 | 6.82193E+00 | −1.01547E+01 |
| 1.06000E+00 | 1.21668E+01 | 21.70350 | −57.9 | 6.46687E+00 | −1.03058E+01 |
| 1.06100E+00 | 1.20898E+01 | 21.64841 | −59.7 | 6.10733E+00 | −1.04338E+01 |
| 1.06200E+00 | 1.20032E+01 | 21.58592 | −61.4 | 5.74547E+00 | −1.05388E+01 |
| 1.06300E+00 | 1.19074E+01 | 21.51633 | −63.1 | 5.38332E+00 | −1.06210E+01 |
| 1.06400E+00 | 1.18032E+01 | 21.44001 | −64.8 | 5.02283E+00 | −1.06812E+01 |
| 1.06500E+00 | 1.16913E+01 | 21.35727 | −66.5 | 4.66584E+00 | −1.07199E+01 |
| 1.06600E+00 | 1.15724E+01 | 21.26849 | −68.1 | 4.31398E+00 | −1.07383E+01 |
| 1.06700E+00 | 1.14473E+01 | 21.17406 | −69.7 | 3.96879E+00 | −1.07373E+01 |
| 1.06800E+00 | 1.13166E+01 | 21.07435 | −71.3 | 3.63147E+00 | −1.07182E+01 |
| 1.06900E+00 | 1.11812E+01 | 20.96975 | −72.8 | 3.30320E+00 | −1.06821E+01 |
| 1.07000E+00 | 1.10416E+01 | 20.86064 | −74.3 | 2.98489E+00 | −1.06305E+01 |

Listado 7.4

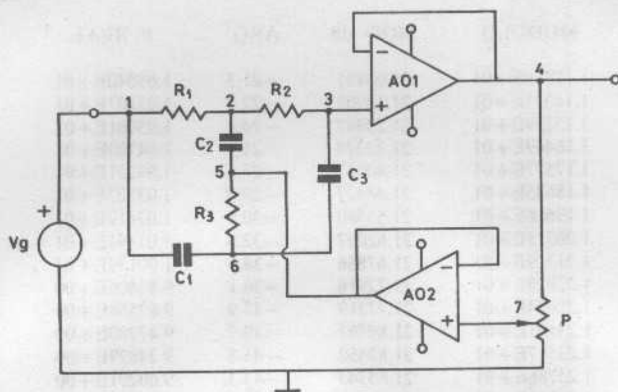
## 7.2 FILTRO DE BANDA ELIMINADA

El circuito de la figura 7.6 es un filtro de banda eliminada centrado en 60 Hz y con factor de calidad ajustable mediante un potenciómetro. Se trata de verificar, mediante simulación con el programa ARIADNA, lo acertado del diseño.

El circuito incorpora amplificadores operacionales comunes tipo 741 y dado que el margen de frecuencias de interés es suficientemente bajo, en comparación al producto GB de los operacionales, éstos podrán modelarse mediante AO ideales. En cuanto al potenciómetro puede modelarse tal como se muestra en la figura 7.7 mediante dos resistores $R_4$, $R_5$ en serie.

Puesto que interesa comprobar el efecto del ajuste del potenciómetro sobre la respuesta en frecuencia del filtro, se crearán diversos ficheros (tres en concreto) con los datos del circuito y que diferirán únicamente en los valores asignados a $R_4$ y $R_5$ tal como se muestra en el listado 7.5.

Las constantes de normalización son en este caso, tal como se indica en el




$R_1 = R_2 = 10\,M\Omega$ ; $R_3 = 5\,M\Omega$ ; $C_1 = C_3 = 270\,pF$ ; $C_2 = 540\,pF$

AO1 ; AO2 tipo 741 ; P potenciómetro 50 kΩ

Figura 7.6 Filtro de banda eliminada.

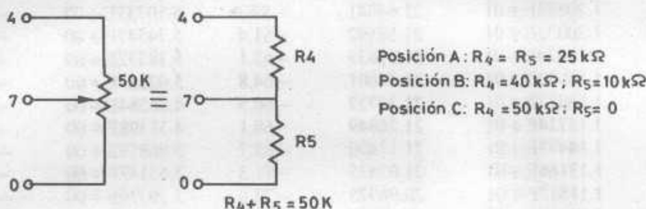



Figura 7.7 Modelación de potenciómetros.

| Posición A | Posición B | Posición C |
|---|---|---|
| 1 : R1 1 2 10E6 | 1 : R1 1 2 10E6 | 1 : R1 1 2 10E6 |
| 2 : R2 2 3 10E6 | 2 : R2 2 3 10E6 | 2 : R2 2 3 10E6 |
| 3 : R3 5 6 5E6 | 3 : R3 5 6 5E6 | 3 : R3 5 6 5E6 |
| 4 : R4 4 7 25E3 | 4 : R4 4 7 40E3 | 4 : R4 4 7 50E3 |
| 5 : R5 7 0 25E3 | 5 : R5 7 0 10E3 | 5 : R5 7 0 0 |
| 6 : C1 1 6 270E-12 | 6 : C1 1 6 270E-12 | 6 : C1 1 6 270E-12 |
| 7 : C2 2 5 540E-12 | 7 : C2 2 5 540E-12 | 7 : C2 2 5 540E-12 |
| 8 : C3 3 6 270E-12 | 8 : C3 3 6 270E-12 | 8 : C3 3 6 270E-12 |
| 9 : 01 4 3 4 | 9 : 01 4 3 4 | 9 : 01 4 3 4 |
| 10 : 02 5 7 5 | 10 : 02 5 7 5 | 10 : 02 5 7 5 |
| 11 : E 1 0 1 | 11 : E 1 0 1 | 11 : E 1 0 1 |

Listado 7.5

listado 7.6, de $R = 10^6$ y $f = 10^6$ con objeto de que las constantes de tiempo normalizadas, asociadas al circuito, sean próximas a la unidad.

A continuación, tal como se muestra en el listado 7.7, se introduce el orden del circuito, que en este caso es tres ($C_1$, $C_2$, $C_3$), y el nodo de salida. Entrando ahora en la opción número 2 del menú, se obtienen las funciones de

Aplicar constantes de normalización (S/N)? S

— Resistencia de normalización? 1E6
— Factor de normalización frecuencial? 1E6

Listado 7.6

CIRCUITO ANALOGICO

ORDEN DE LA MATRIZ 10
Orden estimado del circuito? 3
Número de la salida considerada? 4

Listado 7.7

| COEFICIENTES DEL NUMERADOR | COEFICIENTES DEL DENOMINADOR |
|---|---|
| S0 −.1599999767495319 | S0 −.1599999767058762 |
| S1 −432.0000127404928 | S1 −1296.000038459897 |
| S2 −1166400.017380674 | S2 −3499200.052142103 |
| S3 −3149280000 | S3 −3149280000 |

Listado 7.8

transferencia, que para el fichero correspondiente a la posición A del potenciómetro es la mostrada en el listado 7.8.

Finalmente, se procede a representar la curva de ganancia del filtro para cada una de las posiciones del potenciómetro estudiadas. Puede observarse en la figura 7.8 que el eje de abscisas se ha graduado en una escala logarítmica. Por último, el listado 7.9, con la ganancia tabulada del filtro, permite apreciar con precisión la frecuencia de 59 Hz a la cual se produce el máximo de atenuación.

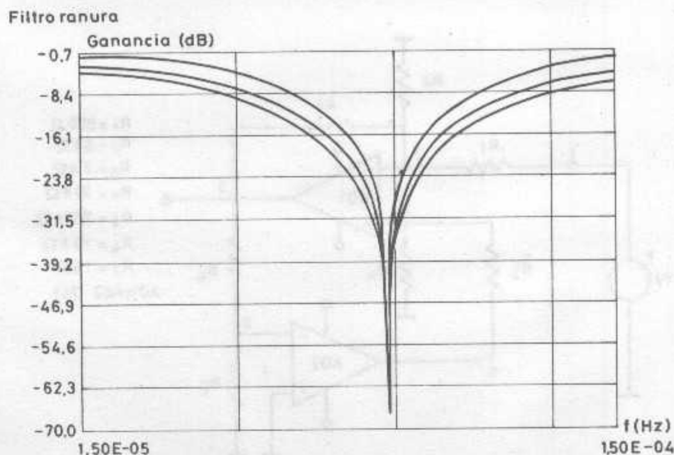



Figura 7.8 Respuesta frecuencial del filtro-ranura.

| FREC. Hz | MODULO | MOD. dB | ARG. | P. REAL | P. IMAG. |
|---|---|---|---|---|---|
| 5.50000E−05 | 6.91824E−02 | −23.20008 | −86.0 | 4.78623E−03 | −6.90167E−02 |
| 5.60000E−05 | 5.12297E−02 | −25.80956 | −87.1 | 2.62452E−03 | −5.11625E−02 |
| 5.70000E−05 | 3.35625E−02 | −29.48292 | −88.1 | 1.12646E−03 | −3.35436E−02 |
| 5.80000E−05 | 1.61819E−02 | −35.81941 | −89.1 | 2.61908E−04 | −1.61798E−02 |
| 5.90000E−05 | 9.11048E−04 | −60.80917 | 89.9 | 8.55283E−07 | 9.11048E−04 |
| 6.00000E−05 | 1.77164E−02 | −35.03251 | 89.0 | 3.13916E−04 | 1.77136E−02 |
| 6.10000E−05 | 3.42342E−02 | −29.31081 | 88.0 | 1.17197E−03 | 3.42141E−02 |
| 6.20000E−05 | 5.04651E−02 | −25.94018 | 87.1 | 2.54677E−03 | 5.04008E−02 |
| 6.30000E−05 | 6.64105E−02 | −23.55526 | 86.2 | 4.41037E−03 | 6.62639E−02 |
| 6.40000E−05 | 8.20717E−02 | −21.71613 | 85.3 | 6.73581E−03 | 8.17949E−02 |
| 6.50000E−05 | 9.74507E−02 | −20.22430 | 84.4 | 9.49664E−03 | 9.69869E−02 |

Listado 7.9

## 7.3 FILTRO ACTIVO R

Un filtro activo *R* es aquel que prescinde del uso de condensadores utilizando en su lugar la dependencia de la ganancia de los amplificadores operacionales con la frecuencia. Se logran así estructuras de tipo paso-bajo, paso-banda o banda eliminada, siempre y cuando las frecuencias de corte o resonancia a obtener sean inferiores al producto *GB* de los amplificadores operacionales usados. Un ejemplo de este tipo de filtros es el de la figura 7.9 que para los valores de los resistores indicados y amplificadores operacionales comunes con $G = 100$ dB y producto ganancia-ancho de banda de 1 MHz, se comporta como un filtro de paso-banda con frecuencia de resonancia en 200 kHz.

La secuencia de operaciones a realizar para la obtención de su curva de respuesta frecuencial es la indicada en el listado 7.10. Obsérvese que el orden del

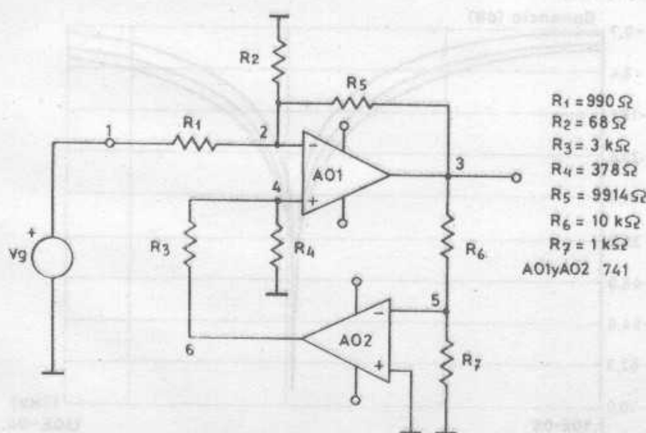



Figura 7.9 Filtro activo R.

```
 1 : R1 1 2 990
 2 : R2 2 0 68
 3 : R3 4 6 3E3
 4 : R4 4 0 378
 5 : R5 2 3 9914
 6 : R6 3 5 10E3
 7 : R7 5 0 1000
 8 : 01 2 4 3 100 1000000
 9 : 02 5 0 6 100 1000000
10 : E 1 0 1

Aplicar constantes de normalización (S/N)? S

    — Resistencia de normalización? 1000
    — Factor de normalización frecuencial? 50E3

CIRCUITO ANALOGICO

    ORDEN DE LA MATRIZ 9
    Orden estimado del circuito? 2
    Número de la salida considerada? 3

            Tipo de gráfica? 1     (1=MODULO / 2=ARGUMENTO)

EJE DE ABSCISAS

    Escala      ? N     (N=LINEAL / L=LOGARITMICA)
    Intervalo   ? 1.5     ? 4
    s⇒FRECUENCIA EN Hz / z⇒ANGULO EN GRADOS
    Alta, Media o Baja resolución (A/M/B) ? A

EJE DE ORDENADAS (MODULO)

    Escala      ? N     (N=LINEAL / L=LOGARITMICA)

    DATOS CORRECTOS (S/N)? S

                        CALCULANDO PUNTO 21
```

Listado 7.10

circuito es 2 puesto que son dos los amplificadores operacionales no ideales en el circuito.

La curva de amplificación resultante se muestra en la figura 7.10.

## 7.4 DIVISOR ANALOGICO

El circuito de la figura 7.11 corresponde al de un divisor analógico implementado en torno a un multiplicador y un amplificador operacional. Suponiendo ideales ambos dispositivos, es sencillo determinar por el método del cortocircuito virtual que $v_0 = -10v_g/v_B$. Sin embargo, experimentalmente se comprueba que el resultado anterior es válido únicamente para tensiones $v_B > 0$, siendo el circuito inestable para tensiones $v_B < 0$. Por otra parte, la dinámica del circuito se ve fuertemente afectada por la amplitud de la tensión $v_B$.

Para ilustrar el comportamiento descrito, el circuito puede linealizarse

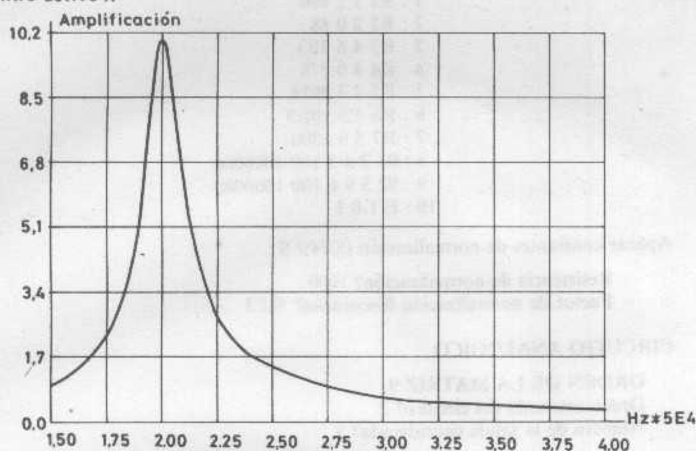



Figura 7.10 Respuesta frecuencial del filtro activo R.

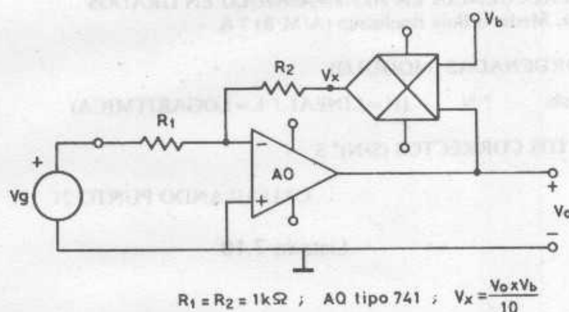



Figura 7.11 Divisor analógico.

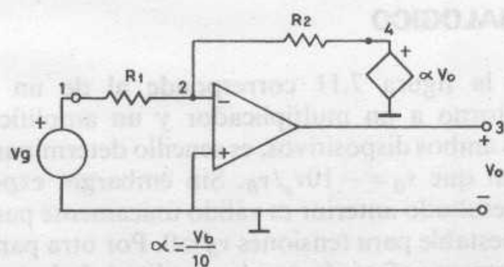



Figura 7.12 Modelo linealizado del divisor analógico.

```
1 : E 1 0 1
2 : R1 1 2 1E3
3 : R2 2 4 1E3
4 : TVV 3 0 4 0 .01
5 : 0 2 0 3 100 1000000
```

```
1 : E 1 0 1
2 : R1 1 2 1E3
3 : R2 2 4 1E3
4 : TVV 3 0 4 0 .03
5 : 0 2 0 3 100 1000000
```

```
1 : E 1 0 1
2 : R1 1 2 1E3
3 : R2 2 4 1E3
4 : TVV 3 0 4 0 .1
5 : 0 2 0 3 100 1000000
```

```
1 : E 1 0 1
2 : R1 1 2 1E3
3 : R2 2 4 1E3
4 : TVV 3 0 4 0 .07
5 : 0 2 0 3 100 1000000
```

```
1 : E 1 0 1
2 : R1 1 2 1E3
3 : R2 2 4 1E3
4 : TVV 3 0 4 0 -.1
5 : 0 2 0 3 100 1000000
```

Listado 7.11

considerando $v_B$ constante, en cuyo caso resulta el modelo equivalente de la figura 7.12 en el que el parámetro $\alpha$ se identifica con $v_B/10$.

Para comprobar el comportamiento antes descrito de este circuito, se procederá a su análisis considerando diversos valores del parámetro $\alpha$ y el amplificador operacional caracterizado por su producto *GB* finito.

En el listado 7.11 aparecen los ficheros correspondientes al circuito de la figura 7.12 para diversos valores de $\alpha$ tanto positivos como negativos.

Una vez se introduzcan las constantes de normalización y el orden del circuito que en este caso será 1, debido al carácter no ideal del amplificador operacional, pueden ya obtenerse las funciones de transferencia $V_3/V_1$.

En el listado 7.13 aparecen las funciones de transferencia correpondientes a

```
Aplicar constantes de normalización (S/N)? S
   — Resistencia de normalización? 1000
   — Factor de normalización frecuencial? 1E6
```

Listado 7.12

```
COEFICIENTES DEL NUMERADOR

S0   1
S1  -2.775557561562891D-17

COEFICIENTES DEL DENOMINADOR

S0  -.1000200014896109
S1  -.3183098137378693
```

*a)* $\alpha=0{,}1$

```
COEFICIENTES DEL NUMERADOR

S0   1
S1  -1.387778780781446D-17

COEFICIENTES DEL DENOMINADOR

S0   9.998000149062136D-02
S1  -.3183098137378693
```

*b)* $\alpha=-0{,}1$

Listado 7.13

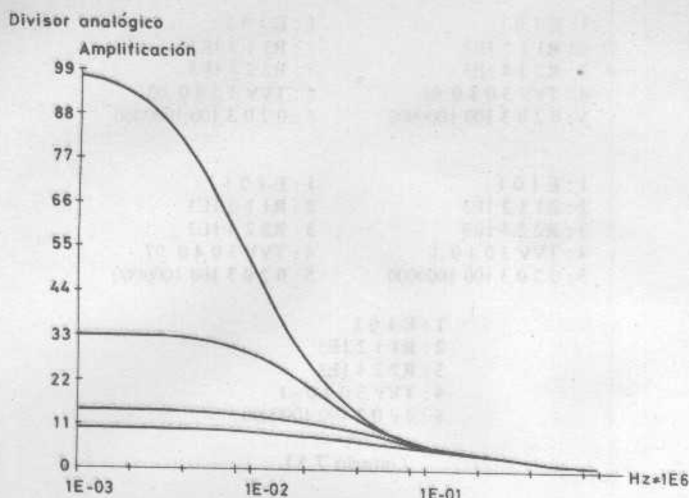



Figura 7.13 Respuesta frecuencial del divisor analógico.

valores de $\alpha=0{,}1$ y $\alpha=-0{,}1$. Puede observarse que para $\alpha>0$ el circuito es estable (polos de $H(s)$ en el semiplano izquierdo) mientras que para $\alpha<0$ el circuito es inestable (polos de $H(s)$ en el semiplano derecho).

Finalmente, se procede a representar la tensión de salida del circuito, en función de la frecuencia de la excitación $v_g$ y con $\alpha=v_B/10$ como parámetro. Se obtienen así las curvas de la figura 7.13 en las que queda patente la reducción del ancho de banda del divisor analógico estudiado conforme la tensión del divisor $v_B$ disminuye.

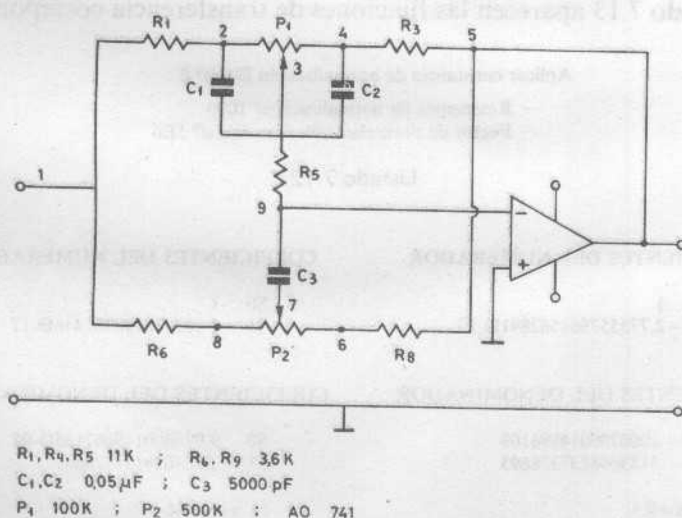



Figura 7.14 Control activo de tonos.

## 7.5 CONTROL DE TONOS

El circuito de la figura 7.14 es frecuentemente utilizado como control activo de tonos en amplificadores de audio. El análisis mediante el programa ARIADNA se realiza de forma similar a la seguida en el estudio del filtro ranura del apartado 7.2. Cada uno de los potenciómetros se modela mediante dos resistores en serie a los que se asigna valores adecuados que permiten simular las distintas posiciones de los ejes de los potenciómetros.

Concretamente se han simulado en este ejemplo cinco posiciones que corresponden a la central en ambos potenciómetros y a las cuatro combinaciones posibles con los ejes en los extremos.

En el listado 7.14 se muestra la función de red correspondiente a los ejes de los potenciómetros centrados. Puede observarse que los coeficientes del numerador y denominador son coincidentes uno a uno, lo que se asocia con una respuesta frecuencial plana.

Finalmente, la figura 7.15 muestra las cinco curvas de respuesta frecuencial estudiadas para este control de tonos.

| COEFICIENTES DEL NUMERADOR | | COEFICIENTES DEL DENOMINADOR | |
|---|---|---|---|
| S0 | −.1147905452114604 | S0 | .1147905452114604 |
| S1 | −.435322438999557 | S1 | .435322438999557 |
| S2 | −.3785406275804505 | S0 | .3785406275804505 |
| S3 | −9.269688533379489D-02 | S3 | 9.269688533379488D-02 |

Listado 7.14

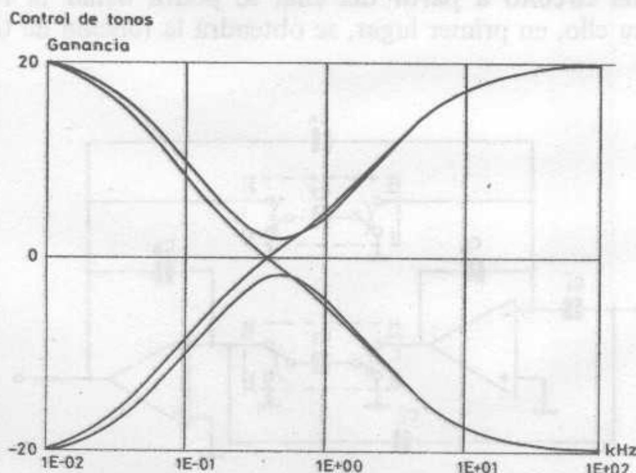



Figura 7.15 Respuesta frecuencial del control de tonos.

## 7.6 SECCION BICUADRATICA SC

En este apartado se presentan los resultados de la simulación de un circuito SC que corresponde a un filtro paso banda de segundo orden.

El diseño del filtro se ha realizado, por aplicación de la transformada bilineal mencionada en el punto 3.2.6, a partir de las especificaciones

Frecuencia de resonancia: 1 kHz
Factor de calidad: 10

Como en la transformación bilineal, debido a la distorsión que se produce en el eje de frecuencias, no se mantiene la simetría de la curva de respuesta en frecuencia propia de este filtro, se ha optado por conservar la banda pasante. De esta manera las frecuencias de corte del nuevo filtro analógico, utilizado como punto de partida, serán

$$f_{c1} = 979 \text{ Hz} \qquad \text{y} \qquad f_{c2} = 1089 \text{ Hz}$$

con lo que el correspondiente ancho de banda es de 110 Hz y el factor de calidad, por tanto, de 9,4.

El filtro SC que surja de la transformación bilineal de este filtro analógico, de características predeformadas, tendrá un comportamiento de acuerdo con las especificaciones iniciales.

La sección bicuadrática utilizada en el diseño se encuentra representada en la figura 7.16 y los valores de los condensadores que corresponden al diseño anterior, se han obtenido teniendo en cuenta que la frecuencia de conmutación será de 10 kHz. Para corroborar su comportamiento según las anteriores especificaciones, se ha simulado el circuito mediante el programa ARIADNA.

El listado 7.15 muestra el contenido del fichero de datos correspondientes a la topología del circuito a partir del cual se podrá hallar la respuesta en frecuencia. Para ello, en primer lugar, se obtendrá la función de transferencia

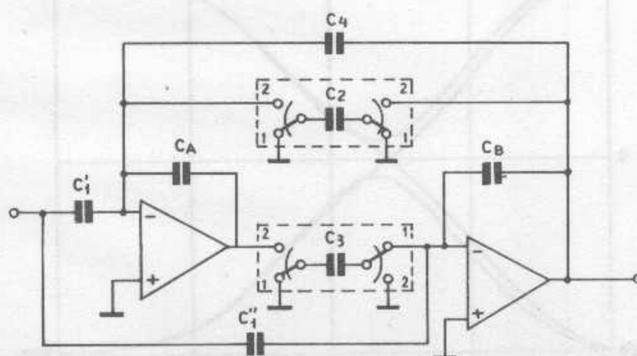



Figura 7.16 Sección bicuadrática SC.

```
1 : 2 7
2 : C1' 1.00087 +S1 -I0 +S1 -I0
3 : CA 1 +S1 -V1 +S1 -V1
4 : CB 1 +S2 -V2 +S2 -V2
5 : C1" .304614 +S2 -I0 +S2 -I0
6 : C2 .608698 +M0 -M0 +S1 -V2
7 : C3 .608698 +S2 -M0 +M0 -V1
8 : C4 .100087 +S1 -V2 +S1 -V2
```

Listado 7.15

```
CIRCUITO DE CONDENSADORES CONMUTADOS
ORDEN DE LA MATRIZ 4
Orden estimado del circuito? 2

1: Hix
2: Hix+Hiy
3: Hix+zHiy
4: Hix+(1/z)Hiy
Tipo de función (1 a 4)? 4
Valor de i (1 o 2)? 1
Valor de x (1 o 2)? 1
Valor de y (1 o 2)? 2
Número de la salida considerada? 2
```

Listado 7.16

del filtro, que, en este caso, corresponderá a la especificada en el listado 7.16, siendo este resultado el reflejado en el listado 7.17.

Por último, en la figura 7.17, se muestra la curva de amplificación, donde puede observarse que el pico de resonancia se produce alrededor de los 36°, lo que efectivamente corresponde a una frecuencia de 1 kHz, y a partir de la tabla

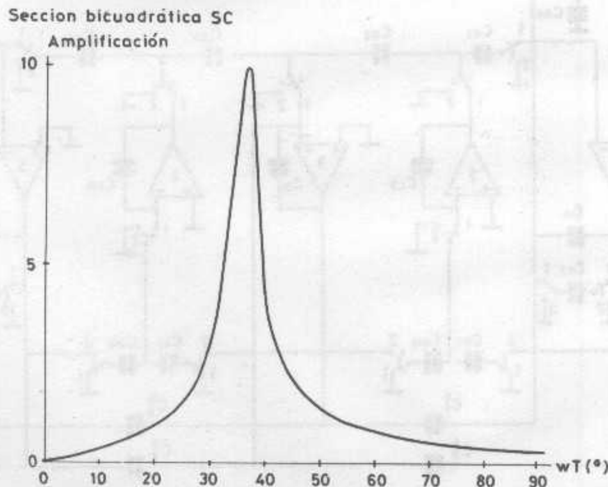



Figura 7.17 Respuesta frecuencial de la sección bicuadrática.

| COEFICIENTES DEL NUMERADOR | | COEFICIENTES DEL DENOMINADOR | |
|---|---|---|---|
| Z0 | −1.569313330905079D−10 | Z0 | 0 |
| Z1 | .3046135634130659 | Z1 | .9390772413885229 |
| Z2 | 4.439098541392239D−07 | Z2 | −1.568563981531722 |
| Z3 | −.3046140071659887 | Z3 | .9999999989921564 |

Listado 7.17

| ANGULO | MODULO | MOD. dB | ARG. | P. REAL | P. IMAG. |
|---|---|---|---|---|---|
| 3.42500E+01 | 7.07419E+00 | 16.99353 | −135.0 | −5.00441E+00 | −5.00000E+00 |
| 3.44500E+01 | 7.49520E+00 | 17.49566 | −138.5 | −5.61780E+00 | −4.96168E+00 |
| 3.46500E+01 | 7.93123E+00 | 17.98681 | −142.5 | −6.29047E+00 | −4.83057E+00 |
| 3.48500E+01 | 8.37200E+00 | 18.45658 | −146.8 | −7.00904E+00 | −4.57861E+00 |
| 3.50500E+01 | 8.80212E+00 | 18.89175 | −151.7 | −7.74775E+00 | −4.17730E+00 |
| 3.52500E+01 | 9.20107E+00 | 19.27677 | −156.9 | −8.46598E+00 | −3.60373E+00 |
| 3.54500E+01 | 9.54412E+00 | 19.59471 | −162.6 | −9.10903E+00 | −2.84882E+00 |
| 3.56500E+01 | 9.80505E+00 | 19.82900 | −168.7 | −9.61392E+00 | −1.92656E+00 |
| 3.58500E+01 | 9.96095E+00 | 19.96602 | −174.9 | −9.92209E+00 | −8.79024E−02 |
| 3.60500E+01 | 9.99744E+00 | 19.99778 | 178.7 | −9.99488E+00 | 2.26587E−02 |
| 3.62500E+01 | 9.91218E+00 | 19.92338 | 172.4 | −9.82514E+00 | 1.31068E+00 |
| 3.64500E+01 | 9.71584E+00 | 19.74961 | 166.3 | −9.43977E+00 | 2.29960E+00 |
| 3.66500E+01 | 9.42882E+00 | 19.48915 | 160.5 | −8.89027E+00 | 3.14099E+00 |
| 3.68500E+01 | 9.07626E+00 | 19.15814 | 155.2 | −8.23787E+00 | 3.81000E+00 |
| 3.70500E+01 | 8.68327E+00 | 18.77366 | 150.3 | −7.53992E+00 | 4.30682E+00 |
| 3.72500E+01 | 8.27147E+00 | 18.35166 | 145.8 | −6.84173E+00 | 4.64844E+00 |
| 3.74500E+01 | 7.85761E+00 | 17.90581 | 141.8 | −6.17421E+00 | 4.86016E+00 |
| 3.76500E+01 | 7.45344E+00 | 17.44713 | 138.2 | −5.55538E+00 | 4.96905E+00 |
| 3.78000E+01 | 7.16135E+00 | 17.09990 | 135.7 | −5.12850E+00 | 4.99835E+00 |

Listado 7.18

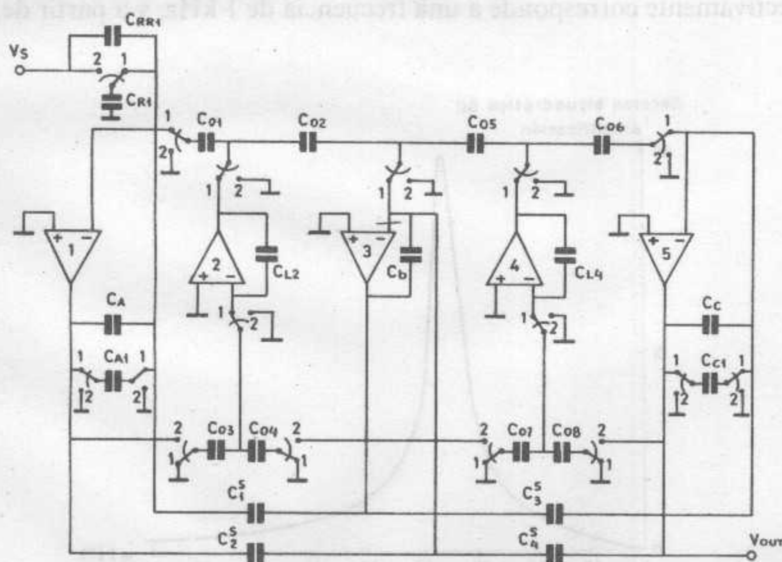



Figura 7.18 Filtro paso bajo elíptico de quinto orden.

del listado 7.18 se encuentran las frecuencias de corte inferior y superior a 34,25° (950 Hz) y 37,8° (1050 Hz), respectivamente.

## 7.7 FILTRO SC PASO BAJO ELIPTICO DE QUINTO ORDEN

El circuito SC de la figura 7.18 corresponde a un diseño de un filtro elíptico paso bajo de quinto orden con un rizado en la banda de paso de 0,05 dB y una atenuación de 57 dB como mínimo en la banda eliminada.

Los resultados de la simulación se muestran en los listados 7.19, 7.20 y 7.21 y en las figuras 7.19 y 7.20.

```
5 21
CRR1 .415704 +S1 -I0 +S1 -I0
CR1 .831408 +S1 -M0 +I0 -M0
CA 1 +S1 -V1 +S1 -V1
CA1 .831408 +S1 -V1 +M0 -M0
C01 1.323227 +S1 -V2 +M0 -M0
C02 .473166 +S3 -V2 +M0 -M0
CL2 1 +S2 -V2 +S2 -V2
C03 .310068 +S2 -M0 +M0 -V1
C04 .310068 +S2 -M0 +M0 -V3
CB 1 +S3 -V3 +S3 -V3
C05 .473166 +S3 -V4 +M0 -M0
C06 1.251848 +S5 -V4 +M0 -M0
CL4 1 +S4 -V4 +S4 -V4
C07 .366992 +S4 -M0 +M0 -V3
C08 .366992 +S4 -M0 +M0 -V5
CC1 +S5 -V5 +S5 -V5
CC1 .786559 +S5 -V5 +M0 -M0
C1S .22157 +S1 -V3 +S1 -V3
C2S .07923 +S3 -V1 +S3 -V1
C3S .43206 +S5 -V3 +S5 -V3
C4S .163307 +S3 -V5 +S3 -V5
```

Listado 7.19

```
CIRCUITO DE CONDENSADORES CONMUTADOS
    ORDEN DE LA MATRIZ 10
    Orden estimado del circuito? 5

    1: Hix
    2: Hix+Hiy
    3: Hix+zHiy
    4: Hix+(1/z)Hiy
    Tipo de función (1 a 4)? 4
    Valor de i (1 o 2)? 1
    Valor de x (1 o 2)? 1
    Valor de y (1 o 2)? 2
    Número de la salida considerada? 5
```

Listado 7.20

| COEFICIENTES DEL NUMERADOR | | COEFICIENTES DEL DENOMINADOR | |
|---|---|---|---|
| Z0 | 5.132165882772791D-12 | Z0 | 0 |
| Z1 | −1.297653615471958D-02 | Z1 | −.8315371484511928 |
| Z2 | 1.102178100803292D-03 | Z2 | 4.71166375818608 |
| Z3 | −1.367639558571766D-02 | Z3 | −11.2430350688326 |
| Z4 | −1.367639559708954D-02 | Z4 | 14.21063248666829 |
| Z5 | 1.102178102199447D-03 | Z5 | −9.582704929773205 |
| Z6 | −1.297653614708371D-02 | Z6 | 2.837183900429505 |

Listado 7.21

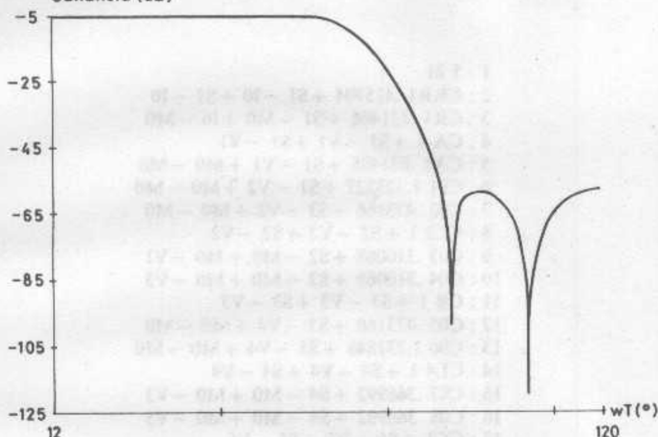



Figura 7.19 Respuesta frecuencial del filtro elíptico.

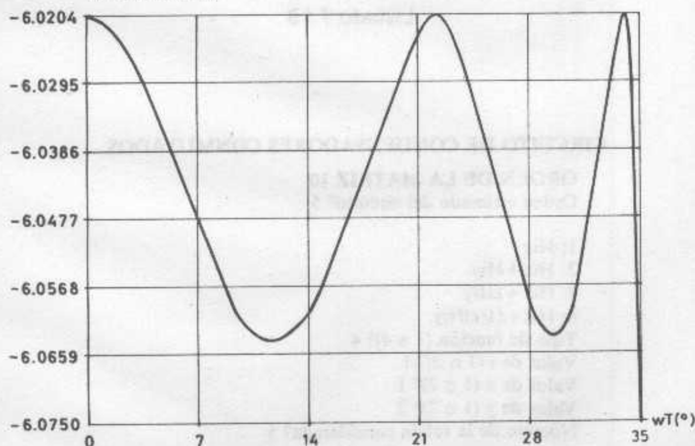



Figura 7.20 Detalle de la banda pasante del filtro elíptico.

# *Apéndice*

En este apéndice se presenta el formato de cada uno de los ficheros de datos que sirven de interconexión entre los bloques principales del programa.

Estos ficheros secuenciales se diferenciarán según el tipo de datos que tengan almacenados, siendo los de extensión TXT aquellos cuya información es la referente a la descripción del circuito, los MAT los que almacenan la matriz del sistema, mientras que los POL incorporan la información referente a los coeficientes de numerador y denominador de la función de red o de transferencia.

A continuación se describe la estructura de cada uno de ellos.

## A.1 FICHEROS TXT

En estos ficheros cada una de las líneas representará uno de los elementos pertenecientes al circuito, teniendo en cuenta que han de conservar todas las características de denominación descritas en el capítulo 6.

Para circuitos analógicos, la estructura de cada una de las líneas dependerá del tipo de elemento y será la representada en la tabla de la figura A.1.

Para el caso de circuitos de condensadores conmutados la primera línea del fichero secuencial contendrá el orden del circuito y el número de condensadores, y en cada una de las líneas sucesivas los registros corresponderán a las especificaciones de cada elemento del circuito. En la tabla de la figura A.2 se muestra la estructura de las líneas del fichero.

Los caracteres xxx que aparecen en cada uno de los elementos, independientemente de si se trata de circuitos analógicos o SC, corresponden a una serie alfanumérica que el usuario puede introducir para diferenciar cada componente del circuito.

Hay que hacer constar que una línea en blanco intercalada en el fichero o al final del mismo da lugar a errores de sintaxis.

| ELEMENTO | FORMATO EN FICHERO | SIMBOLO |
|---|---|---|
| Resistencia | Rxxx i j R | |
| Condensador | Cxxx i j C | |
| Inductancia | Lxxx i j L | |
| Conductancia | Gxxx i j G | |
| Fuente de tensión | Exxx i j E | |
| Fuente de corriente | Jxxx i j J | |
| Amplif. operacional ideal | Oxxx i j k | |
| Amplif. operacional real | Oxxx i j $A_o$(dB) GB (Hz) | |
| Acoplamiento magnético | Mxxx $L_1$ $L_2$ M | |
| Transductor corriente-tensión | TCVxxx i j k ℓ r | |
| Transductor tensión-corriente | TVCxxx i j k ℓ g | |
| Transductor tensión-tensión | TVVxxx i j k ℓ μ | |
| Transductor corriente-corriente | TCCxxx i j k ℓ β | |
| Transistor bipolar Modelo general | QCxxx BEC $r_b$ $r_\pi$ $C_\pi$ $g_\mu$ $C_\mu$ $g_o$ $C_o$ $g_m$ | |
| Transistor bipolar Mod. simplificado | QExxx BEC $r_i$ $g_o$ $g_m$ | |
| Transistor FET | QFxxx GDS $C_{gs}$ $C_{gd}$ $C_{ds}$ $g_o$ $g_m$ | |

Figura A.1 Descripción de los registros en un fichero TXT para cada elemento.

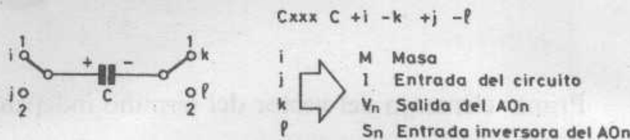



Figura A.2 Descripción del registro de un condensador correspondiente a un circuito SC en un fichero TXT.

## A.2 FICHEROS MAT

En este tipo de fichero la información que se almacena es la referente al orden de la matriz, el número de vectores del término independiente y las matrices $G$ y $C$ del sistema considerado. La estructura de estos ficheros, también secuenciales, es la que se representa a continuación.

| | |
|---|---|
| $n$ | orden de la matriz |
| $n_b$ | dependiendo de si se trata de un circuito analógico o SC, corresponderá a 1 o 2 respectivamente |
| $G(1,1)$ | |
| $G(1,2)$ | |
| . | Fila primera de la matriz $G$ del sistema |
| . | |
| $G(1,n)$ | |
| $G(1,n+n_b)$ | Primer elemento del vector del término independiente |
| . | |
| . | |
| $G(2,1)$ | |
| $G(2,2)$ | |
| . | Segunda fila de la matriz $G$ del sistema |
| . | |
| $G(2,n)$ | |
| $G(2,n+n_b)$ | Segundo elemento del vector del término independiente |
| . | |
| . | |
| $G(n,1)$ | |
| $G(n,2)$ | |
| . | Fila $n$-ésima de la matriz $G$ del sistema |
| . | |
| $G(n,n)$ | |
| $G(n,n+n_b)$ | Elemento $n$-ésimo del vector del término independiente |
| . | |
| . | |
| $C(1,1)$ | |
| $C(1,2)$ | |
| . | Fila primera de la matriz $C$ del sistema |
| . | |

.
.
.
$C(1,n)$
$C(1,n+n_b)$ Primer elemento del vector del término independiente
.
.
.
$C(2,1)$
$C(2,2)$
. Segunda fila de la matriz $C$ del sistema
.
.
$C(2,n)$
$C(2,n+n_b)$ Segundo elemento del vector del término independiente
.
.
.
$C(n,1)$
$C(n,2)$
. Fila $n$-ésima de la matriz $C$ del sistema
.
.
$C(n,n)$
$C(n,n+n_b)$ Elemento $n$-ésimo del vector del término independiente
.
.
.

Al igual que para los ficheros TXT no pueden existir líneas en blanco entre dos líneas del fichero ni al final del mismo pues provocarían errores.

## A.3 FICHEROS POL

En este fichero se almacenará el orden estimado del circuito y los coeficientes de los polinomios del numerador y denominador de la función de transferencia. Su estructura será

$m$ Orden estimado del circuito
$N(0)$
$N(1)$
. Coeficientes del numerador
.
.
$N(m)$
$D(1)$
$D(2)$
. Coeficientes del denominador
.
.
$D(m)$

Al igual que en los anteriores ficheros no pueden existir líneas en blanco entre dos registros del fichero.

# *Bibliografía*

[1] CALAHAN, D. A., «Computer-Aided Network Design», McGraw-Hill, 1972.
[2] CHUA, L.O. y LIN, P.M., «Computer Aided Analysis of Electronic Circuits: Algorithms and Computational Techniques», Prentice-Hall Inc., 1975.
[3] VLACH, J. y SINGHAL, K., «Computer Methods for Circuit Analysis and Design», Van Nostrand Reinhold, 1983.
[4] ALLEN, P.E. y SANCHEZ-SINENCIO, E., «Switched-Capacitor Circuits», Van Nostrand Reinhold, 1984.
[5] THOMAS, R.E. y ROSA, A.S., «Circuits and Signals: An Introduction to Linear and Interface Circuits», John Wiley, 1984.

**A12/E1/91**

Esta edición se terminó de imprimir en octubre de 1991. Publicada por EDICIONES ALFAOMEGA, S.A. de C.V. Apartado Postal 7-1032, 06700 México, D.F. La impresión se realizó en CIA. EDITORIAL ELECTROCOMP, S.A. Calz. de Tlalpan 1702, Col. Country Club, 04220 México, D.F. El tiro fue de 2 000 ejemplares.

Este libro se centra en el estudio de los circuitos analógicos lineales (filtros pasivos y activos, amplificadores, etapas de frecuencia intermedia) y los de condensadores conmutados que son, hoy en día, una de las soluciones más competitivas en el procesado analógico de señales, excluyendo los circuitos no lineales.

Además de un estudio completo del análisis de circuitos y de la presentación de los métodos numéricos de mayor interés en la elaboración de programas de análisis, se incluye un disquete con el programa ARIADNA que funciona en PC compatible y obtiene la respuesta frecuencial de circuitos. En el capítulo 6 se presenta el manual del programa con un conjunto de ejemplos ilustrativos.




ISBN 968-6223-48-7